1.1. Stopień i współczynniki wielomianu

DEFINICJA

Jednomianem zmiennej rzeczywistej nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.
Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.
Jeśli $a \neq 0$, to n nazywamy **stopniem** jednomianu.

Uwaga. Funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$, jest jednomianem stopnia 0. Funkcja stała $y = 0$ jest jednomianem, którego stopnia nie określamy.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$y = x^3 + 2x$ dwumian trzeciego stopnia
$y = 5x^4 + 1$ dwumian czwartego stopnia

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$y = x^2 + 2x + 1$ trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)
$y = 5x^6 - 2x^2 + 4$ trójmian szóstego stopnia

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2$ wielomian ósmego stopnia

Zwróć uwagę na to, że stopniem wielomianu jest najwyższy stopień występującego w nim jednomianu. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

DEFINICJA

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, nazywamy **wielomianem** stopnia n.
Liczby: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.
Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.
Funkcję w stale równą zero nazywamy **wielomianem zerowym** i oznaczamy $w \equiv 0$.

Stopień wielomianu w będziemy oznaczać st (w).

Uwaga. Wielomianem jest zatem zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$ c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$
b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x - \frac{3}{2}x^5$ d) $w(x) = 5 - \frac{1}{2}x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

$a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: st $(w) = 4$.

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$, b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla: $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$
$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$
$w(0) = -7$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w.

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$
b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$ d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{3}{2}$.

a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

ZADANIA

1. Dane są wielomiany: $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0{,}1x^4$, $v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$, $w(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:

a) stopnia trzeciego, uporządkuj go i podaj współczynniki: a_3, a_2, a_1 i a_0,

b) stopnia piątego, uporządkuj go, podaj współczynniki: a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę.

2. Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ i $x = -3$.

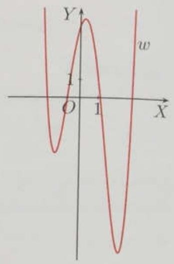
a) $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$

b) $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$

c) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$

d) $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$

3. Punkty: $P(1,a)$, $Q(-1,b)$, $R(2,c)$, $S(3,d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$. Wyznacz współrzędne: a, b, c i d.



4. Które z punktów: P, Q, R należą do wykresu wielomianu u?

a) $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$,
$P(-2,7)$, $Q(0,1)$, $R(2,-5)$

b) $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$,
$P(-1, 8\frac{1}{2})$, $Q(\frac{1}{2}, 2)$, $R(-\frac{1}{2}, -1)$

5. Oblicz współczynnik a wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = ax^2 + x + 1$, $w(1) = 3$,

b) $w(x) = 3x^3 - x^2 + a$, $w(3) = 0$,

c) $w(x) = x^3 + ax^2 + 3$, $w(-4) = 3$,

d) $w(x) = ax^4 + 4x + 2$, $w(2) = -6$.

6. Oblicz współczynniki a, b wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2$, $w(-1) = 4$, $w(2) = 20$,

b) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$, $w(-3) = 11$, $w(1) = 7$.

7. Podaj wielomian stopnia 4., którego współczynniki: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są takimi liczbami, że każda następna, zaczynając od a_1, jest dwukrotnie większa od poprzedniej, a suma wszystkich jest równa 1.

8. Korzystając z tego, że suma współczynników wielomianu w jest równa $w(1)$, oblicz sumę współczynników wielomianu:

a) $w(x) = (x^3 - 2x + 7)(2x^2 + 11x + 13)(x^2 - 1)$,

b) $w(x) = (2x^3 - 5x + 2)^{100}$.

1.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Suma wielomianów jest wielomianem. Aby ją wyznaczyć, dodajemy występujące w nich jednomiany tego samego stopnia.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{i} \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + \underline{9x^3} - \underline{\underline{6x^2}} + \underline{3x} - 5 - \underline{3x^3} + \underline{\underline{2x^2}} - \underline{x} = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w. Podaj stopień wielomianu u, wielomianu w oraz stopień ich sumy.

a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5$, $w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$

b) $u(x) = 9x^7 - 13x^3 + 10x^2 - 2$, $w(x) = -9x^7 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\operatorname{st}(u) = 4$, $\operatorname{st}(w) = 4$ oraz:

a) $\operatorname{st}(u + w) = 4$,

b) $\operatorname{st}(u + w) = 3$,

c) $\operatorname{st}(u + w) = 2$,

d) $\operatorname{st}(u + w) = 1$,

e) $\operatorname{st}(u + w) = 0$.

TWIERDZENIE

Jeśli wielomiany: u, w oraz $u + w$ są niezerowe i $\operatorname{st}(u) \leqslant \operatorname{st}(w)$, to:

$$\operatorname{st}(u + w) \leqslant \operatorname{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w, jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Różnica wielomianów jest wielomianem. Aby ją wyznaczyć, odejmujemy od jednomianów pierwszego wielomianu jednomiany tego samego stopnia drugiego wielomianu.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ &= 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

zmieniamy znaki współczynników wielomianu w

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów: u, w i $u - w$.

a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1, \quad w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1, \quad w(x) = 0{,}75x^6 - 0{,}2x^4 + 0{,}125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \tfrac{3}{2}x) = \\ &= 9x^4 - 6x^3 - x^2 + 3 - 10x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5, \quad g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

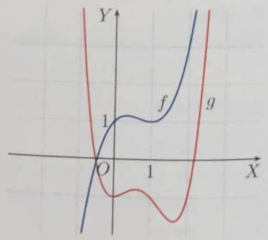
b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x, \quad g(x) = 1{,}5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ oraz $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

a) Czy punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu wielomianu $u(x) = 2f(x) + 4g(x)$?

b) Niech $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$. Dla jakiej wartości współrzędnej a punkt $Q(0, a)$ należy do wykresu wielomianu w?



ZADANIA

1. Wyznacz sumę $f + g$ oraz różnicę $f - g$ wielomianów f i g.

a) $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^2 + 4, \quad g(x) = \frac{1}{4}x^6 + 2x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x - x^6 + 2, \quad g(x) = -5x + 3x^2 + x^6 - 3x^5$

c) $f(x) = 3x^4 + 2x^7 - 5 + 4x, \quad g(x) = -3x + x^5 - 2x^7 + 2$

2. Wyznacz wielomiany $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$ oraz $u(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{3}f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.

a) $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 3, \quad g(x) = -2x^4 + \frac{x^2}{3} + 2$

b) $f(x) = 3x^5 + 6x^3 - 9x, \quad g(x) = 2x^5 + 4x^3 - 4x^2$

3. Dane są wielomiany u i w oraz $f(x) = u(x) + 2w(x)$, $g(x) = 2u(x) - 3w(x)$. Oblicz:

a) $f(5)$ i $g(5)$, gdy $u(5) = 7$ i $w(5) = -2$,

b) $f(-3)$ i $g(-3)$, gdy $u(-3) = -4$ i $w(-3) = -6$,

c) $u(-\frac{1}{2})$ i $w(-\frac{1}{2})$, gdy $f(-\frac{1}{2}) = -9$ i $g(-\frac{1}{2}) = 13$.

4. Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q, jeśli:

a) $\mathrm{st}(p) = 5$, $\mathrm{st}(q) = 4$,

b) $\mathrm{st}(p) = 5$, $\mathrm{st}(q) = 5$,

c) $\mathrm{st}(p) = m$, $\mathrm{st}(q) = n$?

5. Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametru a.

a) $u(x) = 2x^4 - 3x + 6, \quad w(x) = ax^6 + 5x^2 + 4$

b) $u(x) = 3x^6 - ax^5 + 2x^2 - x, \quad w(x) = -3x^6 - 6x^5 - 2x^2 + 9$

c) $u(x) = (a + 1)x^3 - x^2 + 4x, \quad w(x) = (a^2 - 1)x^4 + x^2 + 3$

6. Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametrów a i b.

a) $u(x) = ax^3 + x^2 - 6, \quad w(x) = bx^5 + 7x^3 + x + 2$

b) $u(x) = ax^7 + 3x^2 + 4, \quad w(x) = 3x^7 - bx^2 - 5x + 6$

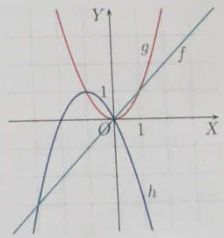
c) $u(x) = (a + 1)x^4 - bx^3 + 2x^2 + 1,$
$w(x) = (-1 - b)x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 9x$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ oraz wielomianu $h(x) = p \cdot f(x) + q \cdot g(x)$.

a) Oblicz wartości p i q.

b) Naszkicuj wykres wielomianu:

$$k(x) = 2h(x) + 4g(x)$$



1.3. Mnożenie wielomianów

Iloczyn wielomianów jest wielomianem. Aby go wyznaczyć, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) = (2x-3) \cdot (x^2 - 2x + 2) &= 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = \\ &= 2x^3 - \underline{4x^2} + \underline{\underline{4x}} - \underline{3x^2} + \underline{\underline{6x}} - 6 = \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 \end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

TWIERDZENIE

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$\operatorname{st}(w \cdot v) = \operatorname{st}(w) + \operatorname{st}(v)$$

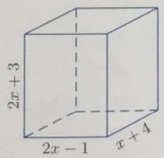
Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w. Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

a) $u(x) = x^3$, $w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$
b) $u(x) = x^2 - 1$, $w(x) = x^5 - x + 1$
c) $u(x) = x - 1$, $w(x) = x^2 + x + 1$
d) $u(x) = 5 - 3x + x^2$, $w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Podaj dziedzinę tej funkcji.



Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$V(x) = (2x-1)(x+4)(2x+3) \quad \text{dla} \quad \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x-1)(x+4)(2x+3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x+3) = \\ &= (2x^2 + 7x - 4)(2x+3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12 \end{aligned}$$

Wielomian $V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c. Podaj dziedzinę tej funkcji.

a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$
b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$
c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$
d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

ZADANIA

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny otrzymanego wielomianu.

a) $2x^2(x^3 - 3x^2 + 7x + 2)$
b) $(x+2)(4x^2 - 3x + 4)$
c) $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(2x^4 - x + 1)$
d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4)$
e) $\left(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{4}\right)$
f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

2. Podaj stopień, współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny wielomianu w bez wykonywania mnożenia.

a) $w(x) = (x-1)(1 - x + x^2)$
b) $w(x) = (1-x)(2x^2 - x + 3)$
c) $w(x) = (1-x^2)(1 - x^2 + 4x^3)$
d) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
e) $w(x) = (1-2x)(1+x)(3x^2+2)$
f) $w(x) = (4x^2+1)(1-x^2)(6-3x)$

3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
b) $w(x) = \sqrt{2}x^2 + x - 2\sqrt{2}$

4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.

a) $u(x) = x^2 + 3x - 1$, $w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1$, $w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $w(x) = 3x^2 - 2x + 1$

5. Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c. Podaj dziedzinę tej funkcji.

a) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = 2x - 4$
b) $a = x^2 + 4$, $b = x + 2$, $c = x^2 - 1$

6. Dla jakich wartości parametrów m i n wielomiany u i w mają te same współczynniki przy odpowiednich potęgach?

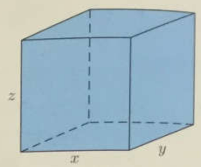
a) $u(x) = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x)$, $w(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + 4x$
b) $u(x) = (4 + x^2 - 2x^4)(2x^2 - x + 1)$,
$w(x) = -4x^6 + 2x^5 + mx^4 - x^3 + nx^2 - 4x + 4$
c) $u(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - 2x^4)$, $w(x) = (m+1)x^7 + (2n-1)x^5 + 2x^3$

Oprócz wielomianów jednej zmiennej rozpatruje się również wielomiany wielu zmiennych, np.:

$u(x,y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x,y,z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + x^5 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych,

$P(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości: x, y, z. Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x,y,z) = xyz$.



7. Oblicz wartość wielomianu w dla podanych argumentów x i y.

a) $w(x,y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y$, $x = -2$, $y = 3$

b) $w(x,y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{16}xy^4$, $x = 2$, $y = -4$

8. Dla której trójki liczb, P czy Q, wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x,y,z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$

b) $w(x,y,z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$

c) $w(x,y,z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$

$P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad Q \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

9. Wyznacz iloczyn.

a) $(2x^2y + 3xy^2)(x - y - 4)$

b) $(x + y)(x - 2y)(x - xy + y^2)$

c) $(x + y)(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$

d) $(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y)(2x^2 + \sqrt{6}\,xy + 3y^2)$

10. Wyznacz iloczyn.

a) $(x - 2y)(y - 2z)(z - 2x)$

b) $(x + y + z)(x - y - z)$

c) $(2x - y)(3y + 2z)(2x + y)(3y - 2z)$

d) $(x + xy + xyz)(1 + x - yz)$

11. Wyznacz wielomian opisujący różnicę pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach: $x + 1$, $y + 1$, $z+1$ i pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach: x, y, z.

*1.7. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że podzielenie liczby a przez liczbę b, różną od zera, polega na znalezieniu takiej liczby c, że $a = c \cdot b$. Na przykład $72 : 9 = 8$, ponieważ $72 = 8 \cdot 9$. Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez wielomian $q \neq 0$, jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1

$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\
\underline{\;3x^2 + 3x\qquad} \\
\qquad\; -4x - 4 \\
\qquad\; \underline{-4x - 4} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r}
7319 : 13 = 563 \\
\underline{-65} \\
81 \\
\underline{-78} \\
39 \\
\underline{-39} \\
0
\end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki przy wykonywaniu tego dzielenia.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\
\underline{\;3x^2 + 3x\qquad} \\
\qquad\; -4x - 4
\end{array}$$

dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika
mnożymy $3x$ przez dzielnik $x + 1$
odejmujemy

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\
\underline{\;3x^2 + 3x\qquad} \\
\qquad\; -4x - 4 \\
\qquad\; \underline{-4x - 4} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika
mnożymy -4 przez dzielnik $x + 1$
odejmujemy
otrzymaliśmy resztę równą 0

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$
b) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$
c) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$
d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. Wykonujemy wówczas dzielenie z resztą.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{l}
(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2) = 5x + 3 \\
\underline{\;5x^2 + 10x\qquad\quad} \\
\qquad\qquad 3x + 11 \\
\qquad\qquad \underline{3x + \;\;6} \\
\qquad\qquad\qquad\; 5
\end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r}
752 : 9 = 83 \\
\underline{-72} \\
32 \\
\underline{-27} \\
5
\end{array}$$

$752 = 83 \cdot 9 + 5$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy iloraz równy $5x + 3$ oraz resztę równą 5, co oznacza, że: $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.

Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$.

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (2x - 3)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (2x - 3) = x^2 + x + \frac{1}{2} \\
\underline{\;2x^3 - 3x^2\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad 2x^2 - 2x - 5 \\
\qquad\quad \underline{2x^2 - 3x\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad x - 5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x - 1\frac{1}{2}} \\
\qquad\qquad\qquad -3\frac{1}{2}
\end{array}$$

otrzymaliśmy resztę równą $-3\frac{1}{2}$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + x + \tfrac{1}{2}\right) \cdot (2x - 3) - 3\tfrac{1}{2} &= 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - 1\tfrac{1}{2} - 3\tfrac{1}{2} = \\
&= 2x^3 - x^2 - 2x - 5
\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$
b) $(4x^2 + 6x + 7) : (2x + 1)$
c) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$
d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : (3x - 1)$

Zwróćmy uwagę, że wykonując dzielenie wielomianu w przez dwumian $ax + b$, otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r, która jest liczbą.

Ćwiczenie 3

Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x,\ \ q(x) = x - 2$

b) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4,\ \ q(x) = x + 3$

c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x,\ \ q(x) = x - 1$

d) $w(x) = 3x^4 - x^2 + 9x - 1,\ \ q(x) = x + 2$

Jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zeru, to mówimy, że wielomian w jest podzielny przez dwumian q.

ZADANIA

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q?

a) $w(x) = 2x^2 - 5x - 12,\ \ q(x) = x - 4$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4,\ \ q(x) = x + 2$

c) $w(x) = -2x^4 + 3x^2 + 6,\ \ q(x) = x - 3$

d) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9,\ \ q(x) = x + 3$

e) $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4,\ \ q(x) = x - 1$

2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$.

a) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1,\ \ q(x) = x - 4$

b) $w(x) = x^3 + 3x + 7,\ \ q(x) = x + 3$

c) $w(x) = 3x^4 - x^2,\ \ q(x) = x - 1$

d) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4,\ \ q(x) = x + 6$

e) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2,\ \ q(x) = x + \frac{1}{2}$

f) $w(x) = 12x^3 + x^2 - x + 3,\ \ q(x) = x - \frac{1}{4}$

3. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$.

a) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9,\ \ q(x) = 2x + 1$

b) $w(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 7,\ \ q(x) = 3x - 1$

c) $w(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 1,\ \ q(x) = 3x + 4$

d) $w(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 2,\ \ q(x) = \frac{1}{2}x + 3$

4. Sprawdź, czy dzielenie zostało wykonane poprawnie.

a) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x - 9) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -2x^2 - 3x + 3$

b) $(-3x^3 + 7x^2 + 6x - 6) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -3x^2 - 2x + 2$

c) $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x - 2) : (x - 2) \stackrel{?}{=} 3x^3 - 2x^2 + 1$

d) $(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 4) : (x - \frac{1}{2}) \stackrel{?}{=} 2x^3 - 4x + 8$

Dla dowolnych wielomianów w i q, gdzie q nie jest wielomianem zerowym, możemy wykonać dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Jako iloraz otrzymujemy pewien wielomian p oraz resztę r. Reszta r albo jest wielomianem zerowym, albo zachodzi zależność: $\mathrm{st}\,(r) < \mathrm{st}\,(q)$.
Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Dla danych wielomianów w i q, gdzie $q \not\equiv 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że:

$$w = p \cdot q + r$$

oraz $r \equiv 0$ lub $\mathrm{st}\,(r) < \mathrm{st}\,(q)$.

Przykład

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 + 0x^2 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2 \\
\underline{\ 2x^3 + 2x^2 + 6x\ } \\
\quad -2x^2 + 2x - 1 \\
\quad \underline{-2x^2 - 2x - 6\ } \\
\qquad\quad 4x + 5
\end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę $r(x) = 4x + 5$, czyli zachodzi następująca równość:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + (4x + 5)$$

Zauważmy, że reszta jest wielomianem stopnia pierwszego.

5. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = -3x^3 - x^2 + 3x - 4,\ \ q(x) = x^2 - 4$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 2,\ \ q(x) = x^2 + x$

c) $w(x) = x^3 + 6,\ \ q(x) = x^2 + x + 1$

d) $w(x) = 4x^4 - 2x + 3,\ \ q(x) = x^2 - 1$

e) $w(x) = x^4 + 6x^3 - 2,\ \ q(x) = 2x^2 + 1$

*1.8. Równość wielomianów

Dwa wielomiany są równe, gdy są zerowe lub gdy mają ten sam stopień i mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej.

Ćwiczenie 1
Czy istnieje taka wartość parametru a, że wielomian $w(x) = 3ax^2 - x + 2a^2$ jest równy wielomianowi u?

a) $u(x) = 6x^2 - x + 8$ b) $u(x) = 3x^2 - x + 1$ c) $u(x) = -9x^2 - x + 18$

Przykład 1
Dla jakiej wartości parametru m prawdziwa jest poniższa równość?

$$(3x^3 + 8x^2 - 5x - 6) : (x + m) = 3x^2 - x - 2$$

Chcemy sprawdzić, dla jakiej wartości m zachodzi równość wielomianów:

$$3x^3 + 8x^2 - 5x - 6 = (3x^2 - x - 2)(x + m)$$

Wykonujemy mnożenie:

$$(3x^2 - x - 2)(x + m) = 3x^3 + 3mx^2 - x^2 - mx - 2x - 2m =$$
$$= 3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m$$

Aby wielomiany: $3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$ oraz $3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m$ były równe, spełnione muszą być równości:

$3m - 1 = 8$ współczynniki przy x^2 muszą być równe

$-m - 2 = -5$ współczynniki przy x muszą być równe

$-2m = -6$ wyrazy wolne muszą być równe

Wszystkie trzy równości są jednocześnie prawdziwe dla $m = 3$.

Przykład 2
Wyznacz wartość parametru a tak, aby iloczyn wielomianów $f(x) = ax - 4$ i $g(x) = ax - 1$ był równy wielomianowi $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$.

Wyznaczamy iloczyn $f \cdot g$:

$$f(x) \cdot g(x) = (ax - 4)(ax - 1) = a^2x^2 - ax - 4ax + 4 = a^2x^2 - 5ax + 4$$

Aby wielomiany $f(x) \cdot g(x) = a^2x^2 - 5ax + 4$ oraz $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$ były równe, muszą być równe współczynniki przy tych samych potęgach, czyli:

$a^2 = 9$, stąd $a = -3$ lub $a = 3$

$-5a = 15$, stąd $a = -3$

Obie równości są jednocześnie spełnione dla $a = -3$.

Ćwiczenie 2
Dla jakiej wartości parametru m prawdziwa jest równość:

a) $(x^4 - 2x^2 - 5x + 2) : (x - m) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$,

b) $(x^3 - 2x^2 - 23x + 60) : (x - m) = x^2 + 2x - 15$?

Ćwiczenie 3
Dla jakiej wartości parametru m iloczyn wielomianów f i g jest równy wielomianowi h?

a) $f(x) = x - m,\ g(x) = x + 7,\ h(x) = x^2 + 4x - 21$

b) $f(x) = \frac{1}{2}mx - 2,\ g(x) = x + 2m + 1,\ h(x) = x^2 + 3x - 10$

c) $f(x) = mx + 1,\ g(x) = x - 2m,\ h(x) = 2x^2 - 3x + 1$

ZADANIA

1. Dla jakiej wartości parametru a prawdziwa jest równość:
   a) $x^3 - x^2 - x - 15 = (x^2 + ax + 5)(x - 3)$,
   b) $x^3 + x^2 - 17x - 20 = (x^2 + ax - 5)(x + 4)$,
   c) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 18 = (2x^2 + ax + 9)(x + 2)$?

2. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $u \cdot v - w$ jest wielomianem zerowym?
   a) $u(x) = -x + 4,\ v(x) = 2x^2 + ax + b,\ w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 5x + 12$
   b) $u(x) = 2ax + b,\ v(x) = x^2 - x,\ w(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$

3. Dla jakich wartości parametrów a i b prawdziwa jest równość:
   a) $-x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x - 15 = (-x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 5)$,
   b) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 1)$,
   c) $2x^4 - 3x^3 + 7x + 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 6)(x + \frac{1}{2})$?

4. Przedstaw wielomian w jako iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.
   a) $w(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$
   b) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x - 1$
   *c) $w(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$
   *d) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 11x - 5$

*1.9. Twierdzenie Bézouta

Wykonując dzielenie wielomianu w przez dwumian $x-a$, otrzymujemy iloraz p oraz resztę r. Czasami interesuje nas tylko reszta z dzielenia – wówczas możemy postąpić jak w poniższym przykładzie.

Przykład 1
Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)=\frac{1}{8}x^3+x^2-3x-5$ przez dwumian $x-4$.

Wielomian w zapisujemy w postaci $w(x)=p(x)(x-4)+r$. Dla $x=4$:

$$w(4)=p(4)(4-4)+r=0+r=r$$

Obliczamy resztę z dzielenia wielomianu w przez $x-4$:

$$r=w(4)=\frac{1}{8}\cdot 4^3+4^2-3\cdot 4-5=8+16-12-5=7$$

TWIERDZENIE O RESZCIE

> Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x-a$, to $r=w(a)$.

Ćwiczenie 1
Udowodnij twierdzenie o reszcie, korzystając z tego, że wielomian w można przedstawić w postaci $w(x)=p(x)(x-a)+r$.

Przykład 2
Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)=2x^3+3x^2-x+5$ przez dwumian $x+2$, nie wykonując dzielenia.

$$r=w(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-(-2)+5=-16+12+2+5=3$$

Ćwiczenie 2
Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x)=x^3-2x^2-2x-3,\ \ q(x)=x-3$
b) $w(x)=4x^3-4x^2-x+1,\ \ q(x)=x-\frac{1}{2}$
c) $w(x)=x^5+x^4+x^3+x+1,\ \ q(x)=x+1$
d) $w(x)=x^5+x^4-x^3-x+6,\ \ q(x)=x+2$

Rozważmy przypadek, gdy reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x-a$ jest równa zeru, czyli gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE BÉZOUTA

> Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy" w twierdzeniu Bézouta [czyt. bezu] oznacza, że jednocześnie prawdziwe są dwa zdania:
Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w, to wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$.
Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w.

Dowód
Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w, czyli $w(a)=0$. Jeśli podzielimy wielomian w przez dwumian $x-a$, to otrzymamy wielomian p i resztę r:

$$w(x)=p(x)(x-a)+r$$

Podstawiamy $x=a$:

$$w(a)=p(a)(a-a)+r=r$$

Ale $w(a)=0$, więc $r=0$, co oznacza, że wielomian w jest podzielny przez $x-a$.

Załóżmy teraz, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$, czyli istnieje taki wielomian p, że $w(x)=p(x)(x-a)$. Wówczas $w(a)=p(a)(a-a)=0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu w.

Przykład 3
Który z wielomianów: $w(x)=x^3+2x^2-3x-10$ czy $u(x)=x^3-5x^2+2x-6$, jest podzielny przez dwumian $x-2$?

$w(2)=2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2-10=8+8-6-10=0$, zatem wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-2$.
$u(2)=2^3-5\cdot 2^2+2\cdot 2-6=8-20+4-6=-14\neq 0$, zatem wielomian u nie jest podzielny przez dwumian $x-2$.

Ćwiczenie 3
Sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q.

a) $w(x)=x^4-2x^3+3x^2-3x+1,\ \ q(x)=x-1$
b) $w(x)=2x^4-3x^3+6x^2+2x-9,\ \ q(x)=x+1$
c) $w(x)=-x^4+x^3+3x^2+11,\ \ q(x)=x-3$
d) $w(x)=x^4+8x^2+2x+16,\ \ q(x)=x+2$

W pewnych przypadkach znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Przykład 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu w, więc na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = p(x)(x - 2)$$

Wielomian p znajdujemy, wykonując dzielenie:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{x^3 - 2x^2 \qquad\qquad} \\
\quad -2x^2 + x + 6 \\
\quad \underline{-2x^2 + 4x \qquad} \\
\qquad\quad -3x + 6 \\
\qquad\quad \underline{-3x + 6} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Zatem $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x - 2)$.

Pozostałymi pierwiastkami wielomianu w są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3.

Ćwiczenie 4

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, $a = -4$

b) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, $a = 1$

c) $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, $a = -2$

d) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, $a = 3$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia w, to pozostałe pierwiastki tego wielomianu (jeżeli istnieją) możemy wyznaczyć w następujący sposób:
1. Dzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$.
2. Otrzymany iloraz jest trójmianem kwadratowym, którego pierwiastki, o ile istnieją, są pozostałymi pierwiastkami wielomianu w. Wyznaczamy te pierwiastki.

ZADANIA

1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = -3x^3 + 11x^2 + 8x - 6$, $q(x) = x + 1$

b) $w(x) = -2x^4 + 10x^2 + x - 8$, $q(x) = x - 2$

c) $w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

2. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$, $a = 1$

b) $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$, $a = -2$

c) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20$, $a = -5$

3. Sprawdź, która z liczb: -1, 1 czy 2 jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $w(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$

b) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

c) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$

d) $w(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$

4. Dla jakich wartości parametru m wielomian w jest podzielny przez q?

a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 3$, $q(x) = x + 3$

b) $w(x) = -2x^3 + m^2x^2 + x - 6$, $q(x) = x - 2$

c) $w(x) = m^2x^3 + mx^2 + x + 7$, $q(x) = x + 1$

5. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u.

a) $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $u(x) = (x - 1)(x + 3)$

b) $w(x) = 7x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, $u(x) = 2x^2 + x - 1$

c) $w(x) = 4x^4 + x^3 - 19x^2 - 4x + 12$, $u(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

Jeśli q jest wielomianem drugiego stopnia, to wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q.

6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez:

a) $(x - 3)(x + 2)$, jeżeli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 3$ wynosi 7, a przez dwumian $x + 2$ wynosi -3,

b) $x^2 - 3x + 2$, jeżeli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 1$ wynosi -1, a przez dwumian $x - 2$ wynosi 3.

7. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian u, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = x^7 - 33x + 11$, $u(x) = (x + 1)(x - 2)$

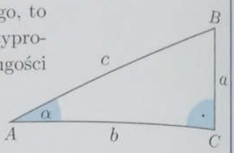
b) $w(x) = x^{99} - 1$, $u(x) = x^2 - 1$

c) $w(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$, $u(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – powtórzenie

Jeśli α jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego, to sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

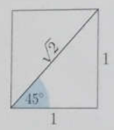
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

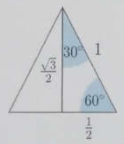


Podobnie możemy zdefiniować cosinus, tangens i cotangens kąta α:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

1. Sprawdź wartości podane w tabeli, korzystając z poniższych rysunków.





α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych przyprostokątnych.

a) 3, 4 b) 9, 12 c) 5, 12 d) 1, 2

3. W trójkącie prostokątnym dana jest długość przeciwprostokątnej c oraz sinus kąta ostrego α. Oblicz długości przyprostokątnych.

a) $c = 10$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $c = 25$, $\sin\alpha = 0{,}28$

4. W trójkącie prostokątnym dany jest tangens kąta ostrego α oraz długość boku a leżącego naprzeciwko kąta α. Oblicz obwód tego trójkąta. Wyznacz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$, $a = 10$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $a = 2$

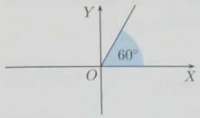
5. Uzasadnij, że podany związek zachodzi między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α.

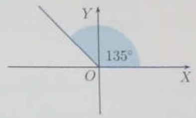
a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ c) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

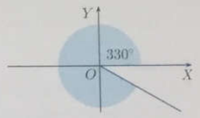
b) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

*3.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Dla uproszczenia obliczeń, kąty umieszcza się często w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta. Jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX. Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

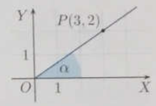






Ćwiczenie 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt $(3, 2)$.



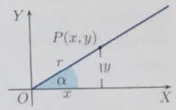
Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt P.

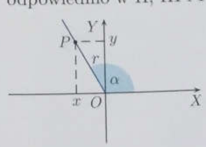
a) $P(3, 4)$ b) $P(6, 8)$ c) $P(\sqrt{3}, 1)$ d) $P(3, 3\sqrt{3})$

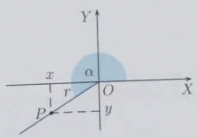
Jeśli $P(x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α, różnym od początku układu współrzędnych, to:

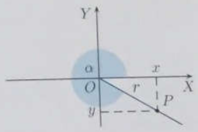
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ x \neq 0,$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},\ y \neq 0,$$
$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Podane powyżej wzory służą do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$. Na rysunkach poniżej ramię końcowe kąta leży odpowiednio w II, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.







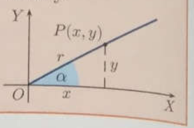
DEFINICJA

Niech $P(x,y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta α, różnym od początku układu współrzędnych. Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$,

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$,

gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$.



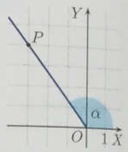
Uwaga. Każdy ze stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od wyboru punktu P. Nie określamy wartości funkcji tangens dla 90° i 270° oraz funkcji cotangens dla 0°, 180° i 360°.

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli do ramienia końcowego tego kąta należy punkt $P(-3,4)$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

$$r = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ zatem } \sin\alpha = \frac{4}{5}, \ \cos\alpha = -\frac{3}{5}.$$



Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt P. Przedstaw ten kąt na rysunku.

a) $P(-4,3)$ b) $P(8,-6)$ c) $P(-1,-3)$ d) $P(-2,-6)$

Przykład 2

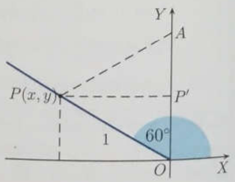
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150°.

Zauważmy, że $150° = 90° + 60°$.

Rozpatrzmy trójkąt równoboczny POA (rysunek obok) o boku długości 1, wówczas:

$$|OP'| = \frac{1}{2}, \quad |PP'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 150° ma współrzędne $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, a stąd:



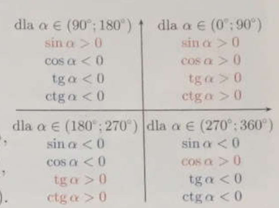
$$\sin 150° = \frac{1}{2}, \quad \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 150° = -\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta.

a) 135° b) 225° c) 210°

W zależności od tego, w której ćwiartce układu współrzędnych położone jest ramię końcowe kąta α, wartości: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ są dodatnie lub ujemne.



Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że:

a) $\sin\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0°;180°)$,

b) $\cos\alpha > 0$ dla $\alpha \in \langle 0°;90°) \cup (270°;360°\rangle$,

c) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0°;90°) \cup (180°;270°)$,

d) $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0°;90°) \cup (180°;270°)$.

ZADANIA

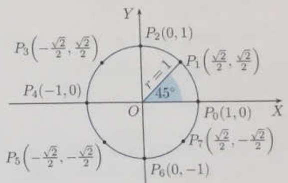
1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt P.

a) $P(5,12)$ b) $P(-5,-12)$ c) $P(\sqrt{3},-1)$ d) $P(-\sqrt{3},1)$

2. Uzasadnij, że jeśli punkt $P(x,y)$ należy do okręgu jednostkowego o środku $O(0,0)$ oraz leży na ramieniu kąta α, to: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Okrąg o promieniu 1 nazywamy **okręgiem jednostkowym**.

3. a) Na rysunku obok przedstawiono okrąg jednostkowy z zaznaczonymi punktami: $P_0, \ldots, P_7$. Uzasadnij, że punkty: P_1, P_3, P_5, P_7 należą do tego okręgu.



b) Podaj miarę kąta α_i, do którego ramienia końcowego należy punkt P_i dla $i = 0, 1, \ldots, 7$.

c) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

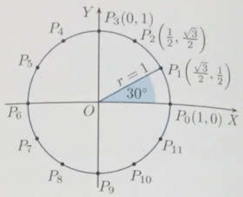
α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
$\sin\alpha$	?	?	?	?	?	?	?	?
$\cos\alpha$	?	?	?	?	?	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	×	?	?	?	×	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	×	?	?	?	×	?	?	?

4. Oblicz.

a) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 135^\circ$ b) $\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} 225^\circ$ c) $\sin 225^\circ + \cos^3 315^\circ$

5. a) Na okręgu jednostkowym, którego środek leży w początku układu współrzędnych, zaznaczono dwanaście punktów wyznaczonych przez ramiona końcowe kątów, których miary są wielokrotnościami 30° (rysunek obok). Podaj współrzędne punktów: $P_4, \ldots, P_{11}$.

b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij, korzystając z rysunku.



α	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
$\sin\alpha$	?	?	?	$\frac{1}{2}$	?	?	?	?
$\cos\alpha$	?	?	?	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	?	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	?	?	?	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	?	?	?	$-\sqrt{3}$	?	?	?	?

6. Oblicz.

a) $\sin^2 120^\circ + \cos^2 150^\circ$

b) $\dfrac{\cos 120^\circ}{\sin^2 330^\circ} + \dfrac{\operatorname{tg} 150^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ}$

c) $\cos 330^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ$

d) $\dfrac{\cos^2 150^\circ \operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}{\sin^2 150^\circ + \cos^2 210^\circ}$

7. W której ćwiartce układu współrzędnych leży ramię końcowe kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha < 0$,

b) $\operatorname{tg}\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$,

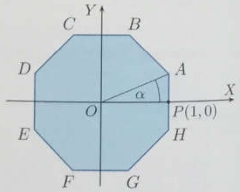
c) $\sin\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$,

d) $\cos\alpha < 0$ i $\sin\alpha\cos\alpha > 0$?

8. Ośmiokąt foremny umieszczono w układzie współrzędnych tak, jak na rysunku obok.

a) Oblicz długość boku tego ośmiokąta.

b) Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA oraz kąta POC.



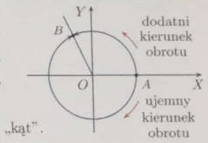
9. Punkt $P\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ leży na ramieniu końcowym kąta 15°. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeżeli:

a) $\alpha = 165^\circ$, b) $\alpha = 195^\circ$, c) $\alpha = 345^\circ$, d) $\alpha = 75^\circ$.

*3.2. Kąt obrotu

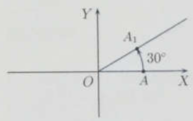
W życiu codziennym często spotykamy przykłady obrotów, np.: obrót koła (roweru, samochodu itp.) czy obrót wskazówek zegara.

Niech półprosta OA pokrywa się z dodatnią półosią OX układu współrzędnych. **Kątem obrotu** AOB nazywamy kąt, o jaki należy obrócić półprostą OA wokół punktu O, aby pokryła się ona z półprostą OB. Półprostą OA nazywamy ramieniem początkowym kąta obrotu, a półprostą OB – ramieniem końcowym.

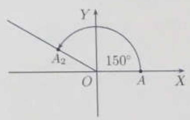


Uwaga. Zamiast „kąt obrotu" będziemy krótko mówić „kąt".

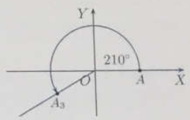
Przyjmujemy, że:
- **dodatni kierunek obrotu** jest kierunkiem przeciwnym do ruchu wskazówek zegara,
- **ujemny kierunek obrotu** jest kierunkiem zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



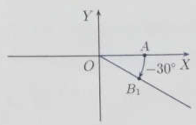
Półprosta OA po obrocie o 30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_1.



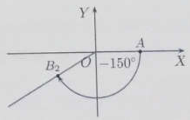
Półprosta OA po obrocie o 150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_2.



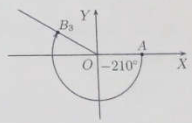
Półprosta OA po obrocie o 210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_3.



Półprosta OA po obrocie o -30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_1.



Półprosta OA po obrocie o -150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_2.



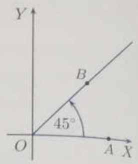
Półprosta OA po obrocie o -210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_3.

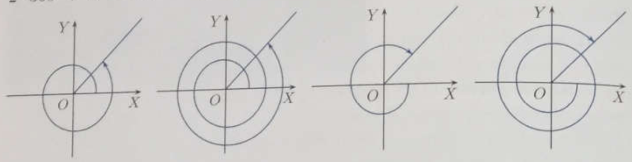
Przykład 1

Rozpatrzmy kąt AOB przedstawiony na rysunku obok. Półprosta OA pokryje się z półprostą OB nie tylko po obrocie wokół początku układu współrzędnych o kąt 45°, ale również po obrocie na przykład o kąty:

$360^\circ + 45^\circ = 405^\circ$ $\quad$ $(-1) \cdot 360^\circ + 45^\circ = -315^\circ$

$2 \cdot 360^\circ + 45^\circ = 765^\circ$ $\quad$ $(-2) \cdot 360^\circ + 45^\circ = -675^\circ$





$360^\circ + 45^\circ$ $\quad$ $2 \cdot 360^\circ + 45^\circ$ $\quad$ $(-1) \cdot 360^\circ + 45^\circ$ $\quad$ $(-2) \cdot 360^\circ + 45^\circ$

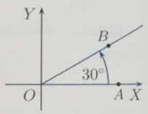
Ogólnie, aby półprosta OA pokryła się z półprostą OB, należy obrócić ją wokół początku układu współrzędnych o kąt równy $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Kąty o mierze $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, mają więc wspólne ramię końcowe.

Ćwiczenie 1

Podaj, o które z podanych kątów można obrócić półprostą OA, aby pokryła się ona z półprostą OB (rysunek obok).

390°, 750°, 1100°, 1470°, -330°, -690°, -1050°, -1400°



Przykład 2

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbf{C}$.

a) $1400^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 320^\circ$

b) $730^\circ 10' = 2 \cdot 360^\circ + 10^\circ 10'$

c) $-700^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 20^\circ$

d) $-1080^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 0^\circ$

Ćwiczenie 2

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbf{C}$.

a) 850°
b) 1413°
c) -695°
d) -3590°
e) $1439^\circ 30'$
f) $-1079^\circ 25'$
g) $-710^\circ 15'$
h) $630^\circ 20'$

Podane w poprzednim rozdziale definicje funkcji trygonometrycznych można uogólnić na dowolny kąt $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbf{C}$.

Dla kąta $\alpha + k \cdot 360^\circ$ takiego, że $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ i $k \in \mathbf{C}$, definiujemy:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{dla } \alpha \neq 90^\circ \text{ i } \alpha \neq 270^\circ$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{ctg}\alpha \quad \text{dla } \alpha \neq 0^\circ \text{ i } \alpha \neq 180^\circ$$

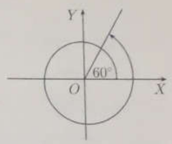
Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 420°.

$420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$, zatem:

$\sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{tg} 420^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

$\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{ctg} 420^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Ramię końcowe kąta 420° pokrywa się z ramieniem końcowym kąta 60°.

Przykład 4

$\sin 750^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}(-1035^\circ) = \operatorname{tg}(-3 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sin 405^\circ$
b) $\sin 780^\circ$
c) $\sin 1125^\circ$
d) $\operatorname{tg} 765^\circ$
e) $\operatorname{tg} 1500^\circ$
f) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$
g) $\cos(-690^\circ)$
h) $\cos(-1035^\circ)$

ZADANIA

1. Zaznacz w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego kąta α.

a) $\alpha = 315^\circ$
b) $\alpha = -120^\circ$
c) $\alpha = 570^\circ$
d) $\alpha = -1305^\circ$
e) $\alpha = -2130^\circ$
f) $\alpha = 4260^\circ$

2. Podaj miary kątów, do których ramienia końcowego należy punkt $P(1, -1)$.

3. Do końcowego ramienia kąta α należy punkt $P(3, 3\sqrt{3})$. Wyznacz α, jeśli:

a) $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$,
b) $\alpha \in \langle 1080^\circ; 1440^\circ)$,
c) $\alpha \in \langle -360^\circ; 0^\circ)$.

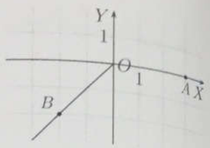
4. Czy punkt $P(-\sqrt{3}, 1)$ należy do ramienia końcowego kąta α?

a) $\alpha = 150^\circ$
b) $\alpha = -210^\circ$
c) $\alpha = 510^\circ$
d) $\alpha = -930^\circ$
e) $\alpha = 2310^\circ$
f) $\alpha = -1210^\circ$

5. Półprosta OA po obrocie o kąt α pokryła się z półprostą OB (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta α, jeśli:

a) $\alpha \in \langle 0°; 360°)$, c) $\alpha \in \langle 1080°; 1440°)$,

b) $\alpha \in \langle 360°; 720°)$, d) $\alpha \in \langle -1080°; -720°)$.



6. Oblicz.

a) $\sin(-330°)$	e) $\cos 1140°$	i) $\operatorname{tg}(-720°)$	m) $\operatorname{tg} 495°$
b) $\cos(-675°)$	f) $\operatorname{tg}(-660°)$	j) $\cos(-1080°)$	n) $\cos 855°$
c) $\sin 840°$	g) $\sin 810°$	k) $\sin 630°$	o) $\cos(-495°)$
d) $\operatorname{tg}(-300°)$	h) $\cos 900°$	l) $\operatorname{tg}(-180°)$	p) $\operatorname{ctg} 750°$

7. Wyznacz kąt α taki, że:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (360°; 450°)$, d) $\operatorname{tg}\alpha = -1$ i $\alpha \in (360°; 540°)$,

b) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (1080°; 1170°)$, e) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\alpha \in (720°; 900°)$,

c) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (720°; 810°)$, f) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ i $\alpha \in (-360°; -270°)$.

8. Podaj, dla jakich kątów α:

a) $\sin\alpha = 0$, b) $\cos\alpha = 0$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 0$, d) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

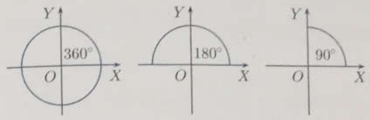
9. Wskazówka minutowa zegara ma długość 10 cm. Oblicz, jaką drogę przebędzie punkt na końcu tej wskazówki w czasie:

a) godziny, c) doby,

b) 250 minut, d) roku.

10. Wskazówka godzinowa zegara jest o 25% krótsza od wskazówki minutowej. Punkt na końcu wskazówki minutowej przebył drogę 36 cm. Jaką drogę w tym samym czasie przebył punkt na końcu wskazówki godzinowej tego zegara?

*3.3. Miara łukowa kąta



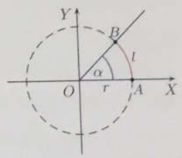
Kąt pełny Kąt półpełny Kąt prosty

Mierzenie kąta w stopniach, minutach i sekundach zawdzięczamy starożytnym Babilończykom. Używali oni sześćdziesiątkowego systemu zapisu liczb.

Miarę kąta zwykle podajemy w stopniach. Gdy potrzebna jest większa dokładność, posługujemy się minutami oraz sekundami.

Aby podać miarę kąta, można, oprócz miary stopniowej, wykorzystać:
- miarę łukową – jej jednostką jest 1 radian, kąt półpełny to π radianów;
- miarę gradusową – jej jednostką jest 1 gradus będący $\frac{1}{400}$ kąta pełnego (miara używana w geodezji);
- tysięczne artyleryjskie – jej jednostką jest 1 tysięczna artyleryjska będąca $\frac{1}{1000}$ radiana (miara używana w wojskowości).

Aby określić miarę łukową kąta α, kreślimy z jego wierzchołka okrąg o dowolnie dobranym promieniu r.



Miarą łukową kąta α nazywamy stosunek długości łuku l, wyznaczonego przez ten kąt, do długości promienia r okręgu.

$$\alpha = \frac{\text{długość łuku}}{\text{długość promienia}} = \frac{l}{r}$$

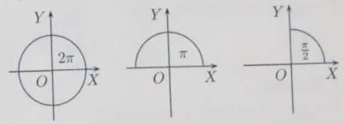
Jednostkę miary łukowej nazywamy **radianem**, w skrócie piszemy: **rad**.

Miary łukowe kąta pełnego, półpełnego i prostego są odpowiednio równe:

– kąt pełny: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

– kąt półpełny: $\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\pi r}{r} = \pi$

– kąt prosty: $\frac{\frac{1}{4}\cdot 2\pi r}{r} = \frac{\pi}{2}$

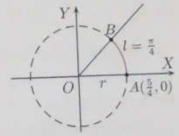


Ćwiczenie 1

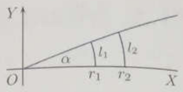
Podaj miarę łukową kąta AOB, jeśli:

a) $r = 4$, $l = 6$, c) $r = \frac{5}{4}$, $l = \frac{\pi}{4}$ (rysunek obok),

b) $r = \frac{1}{3}$, $l = \frac{1}{6}$, d) $r = \frac{2}{3}$, $l = \pi$.



Zauważmy, że miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia okręgu, gdyż $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$ (rysunek obok). Zatem wygodnie jest posługiwać się okręgiem jednostkowym. Możemy więc przyjąć następującą definicję:



DEFINICJA

Miara łukowa kąta jest równa długości łuku, jaki ramiona tego kąta wyznaczają na okręgu jednostkowym (o środku w wierzchołku kąta).

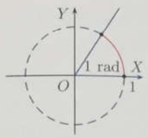
Kąt ma miarę 1 radiana (1 rad), jeśli łuk wyznaczony przez ten kąt na okręgu jednostkowym ma długość 1.

Kąt pełny ma miarę łukową 2π radianów, zatem:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ = 57^\circ 18'$$

natomiast:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$



Uwaga. Kiedy podajemy miarę łukową kąta, zwyczajowo pomijamy nazwę jednostki. Zamiast: „kąt o mierze 2π radianów, $\frac{\pi}{2}$ radianów czy 3 radianów", mówimy krótko: „kąt o mierze $2\pi, \frac{\pi}{2}, 3$".

Przykład 1

a) Podaj miarę łukową kąta 120°.

$120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$

Aby wyznaczyć miarę łukową kąta 120°, możemy również skorzystać z proporcji:

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

Stąd $x = \frac{120^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2}{3}\pi$

b) Podaj miarę łukową kąta 1140°.

$1140^\circ = 1080^\circ + 60^\circ = 3 \cdot 360^\circ + \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 3 \cdot 2\pi + \frac{1}{3} \cdot \pi = 6\frac{1}{3}\pi$

Ćwiczenie 2

Podaj miarę łukową kąta.

a) 30° b) 45° c) 72° d) 780° e) $11^\circ 15'$

Ćwiczenie 3

Podaj miarę kąta w stopniach.

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{4}{5}\pi$ d) $\frac{19}{10}\pi$ e) $\frac{28}{15}\pi$

W radianach będziemy również wyrażać miarę kąta obrotu. Niech α_1 i α będą miarami tego samego kąta wyrażonymi odpowiednio w stopniach i w radianach, przy czym $\alpha_1 \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$. Dla dowolnej liczby $k \in \mathbf{C}$ zamiast $k \cdot 360^\circ + \alpha_1$ możemy pisać $2k\pi + \alpha$.

Przykład 2

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta α i kąta $2k\pi + \alpha$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, są równe.

a) Oblicz $\cos\frac{9\pi}{4}$.

$\cos\frac{9\pi}{4} = \cos 2\frac{1}{4}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\frac{1}{4}\pi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Oblicz $\operatorname{tg}\left(-\frac{11}{3}\pi\right)$.

$\operatorname{tg}\left(-\frac{11}{3}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Ćwiczenie 4

Przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij, a następnie oblicz:

a) $\sin 2\frac{1}{3}\pi$, d) $\sin\frac{17}{4}\pi$, g) $\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$,

b) $\operatorname{tg}\frac{13}{6}\pi$, e) $\sin(-4\pi)$, h) $\cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right)$,

c) $\operatorname{tg}\frac{13}{3}\pi$, f) $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$, i) $\sin\left(-\frac{23}{4}\pi\right)$.

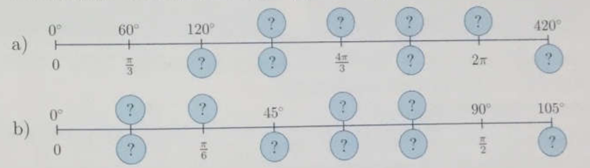
α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	?	?	?
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	?	?	?

ZADANIA

1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

W stopniach	5°	10°	?	36°	?	?	?	225°	315°	?	?
W radianach	?	?	$\frac{\pi}{8}$	?	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{6}$	?	?	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$

2. Na rysunku poniżej przedstawiono dwie miary kątów: stopniową i łukową. Przerysuj go do zeszytu i uzupełnij puste miejsca.



3. Podaj miarę łukową kąta.

a) 20° b) 315° c) 765° d) -420° e) -1100°

4. Podaj miarę kąta w stopniach.

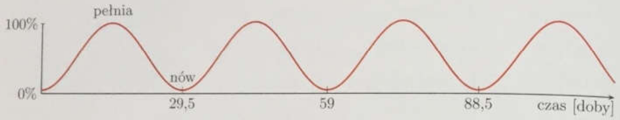
a) $\frac{3}{4}\pi$ b) $\frac{7}{12}\pi$ c) $\frac{16}{9}\pi$ d) $-\frac{9}{4}\pi$ e) $-\frac{13}{3}\pi$

5. Oblicz.

a) $\sin\frac{9}{4}\pi$ b) $\cos\frac{7}{3}\pi$ c) $\cos\frac{17}{4}\pi$ d) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$ e) $\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$

*3.4. Funkcje okresowe

Na zdjęciach powyżej przedstawiono kolejne fazy Księżyca: od pełni do nowiu. Pełny cykl zmian faz Księżyca trwa średnio 29 i pół doby.



Schematyczny wykres pokazujący, jaki procent tarczy Księżyca jest widoczny z Ziemi w kolejnych dniach cyklu.

DEFINICJA

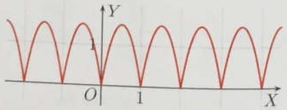
Funkcję f określoną na zbiorze D nazywamy **okresową**, jeśli istnieje liczba $T \neq 0$ taka, że dla każdego argumentu $x \in D$ i dowolnej liczby całkowitej k:

$$x + kT \in D \text{ oraz } f(x + kT) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji okresowej. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Okresem tej funkcji jest dowolna liczba całkowita różna od zera. Liczba 1 jest najmniejszym okresem dodatnim tej funkcji.

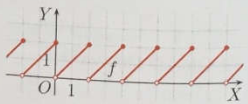
Najmniejszy okres dodatni funkcji (jeśli istnieje) nazywany jest **okresem podstawowym** albo **zasadniczym**.



Zwróć uwagę, że jeśli T jest okresem funkcji f, to każda liczba $k \cdot T$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, też jest okresem tej funkcji.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej f. Podaj okres podstawowy tej funkcji. Ile wynosi $f(100)$, a ile $f(100\frac{1}{2})$?

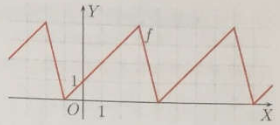


Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej f o okresie podstawowym $T = 5$. Oblicz $f(101)$ i $f(-96)$.

$f(101) = f(20 \cdot 5 + 1) = f(1) = 2$

$f(-96) = f(-20 \cdot 5 + 4) = f(4) = 0$

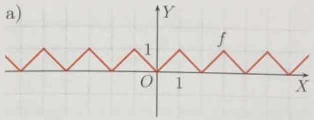


Dla funkcji f mamy:
$f(x) = f(x + 5) = f(x + 2 \cdot 5) = \ldots$

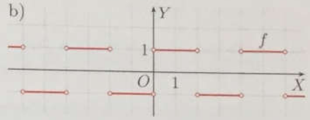
Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej f. Odczytaj z wykresu okres podstawowy tej funkcji. Oblicz: $f(-11)$, $f(80\frac{1}{2})$, $f(103)$.

a)



b)

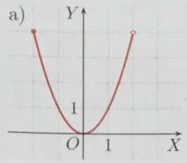


Przypływ i odpływ oceanu – Zatoka Fundy w Kanadzie.

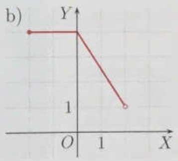
ZADANIA

1. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o okresie $T = 4$. Naszkicuj wykres tej funkcji dla $x \in \langle -6; 10)$.

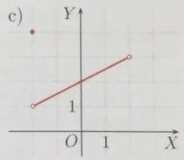
a)



b)



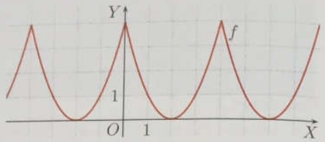
c)



2. Naszkicuj wykres funkcji okresowej f o okresie $T = 2$, wiedząc, że w przedziale $\langle -1; 1)$ pokrywa się on z wykresem funkcji g.

a) $g(x) = |x|$ b) $g(x) = x$ c) $g(x) = 1 - x^2$ d) $g(x) = \frac{3}{2}x^3$

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o okresie $T = 4$.



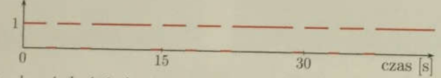
a) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 1$ należących do przedziału $\langle 0; 20\rangle$.

b) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ należących do przedziału $\langle 0; 400\rangle$.

4. Uzasadnij, że funkcja stała $f(x) = c$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$ jest funkcją okresową, ale nie istnieje dla niej okres podstawowy.

5. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x - [x]$ i podaj jej okres podstawowy.

Sygnały świetlne wysyłane przez latarnie morskie powtarzają się okresowo. Charakterystyka światła wysyłanego przez latarnię morską w Gąskach koło Mielna: światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 6,4 s, przerwa – 1,2 s (okres – 15 s).



Wartość 1 odpowiada światłu, 0 odpowiada przerwie.

6. Naszkicuj schematyczny wykres przedstawiający charakterystykę światła wysyłanego przez latarnię morską:

a) w Helu: światło – 5 s, przerwa – 5 s (okres wynosi 10 s),

b) w Krynicy Morskiej: światło – 2 s, przerwa – 2 s, światło – 2 s, przerwa – 6 s (okres wynosi 12 s).

Latarnia morska w Gąskach

*3.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

Funkcje trygonometryczne możemy traktować jako funkcje zmiennej x, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą będącą miarą pewnego kąta, wyrażoną w radianach. Wówczas dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ oraz $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Zatem sinus i cosinus są funkcjami okresowymi o okresie $T = 2\pi$. Można wykazać, że jest to ich okres podstawowy.

Dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.
Dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

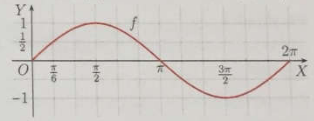
Wykres funkcji sinus

W tabeli podano wartości funkcji $f(x) = \sin x$ dla wybranych argumentów z przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

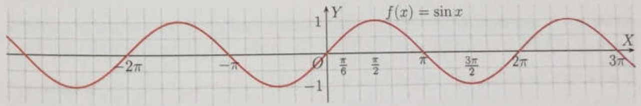
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Na podstawie tabeli szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

Przybliżone wartości funkcji sinus dla innych argumentów niż podane w tabeli możemy obliczyć, korzystając z kalkulatora, lub odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.



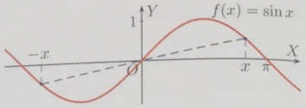
Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbf{R}$, możemy skorzystać z okresowości tej funkcji. Wykres funkcji sinus nazywamy **sinusoidą**.



Własności funkcji $f(x) = \sin x$:

a) dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych;
b) zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1\rangle$;
c) jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = 2\pi$;
d) wartość najmniejszą -1 przyjmuje dla $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$;
e) wartość największą 1 przyjmuje dla $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$;
f) wartość 0 przyjmuje dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

Środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każdy punkt o współrzędnych $(k\pi, 0)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. W szczególności jest nim punkt $O(0, 0)$ – prawdziwa jest więc poniższa własność.



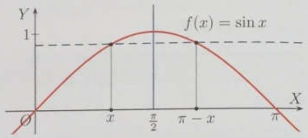
> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:
> $\sin(-x) = -\sin x$

Ćwiczenie 1

a) Podaj wartość $\sin(-75^\circ)$, jeśli wiadomo, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b) Podaj wartość $\sin 15^\circ$, jeśli wiadomo, że $\sin(-15^\circ) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każda prosta pionowa określona równaniem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.
W szczególności jest nią prosta $x = \frac{\pi}{2}$ – prawdziwa jest więc poniższa własność.

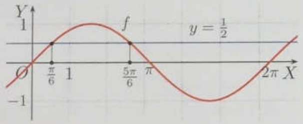


> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:
> $\sin(\pi - x) = \sin x$

Przykład 1

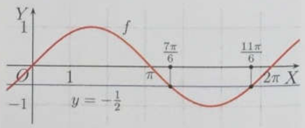
a) Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi)$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.

Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = \frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \frac{\pi}{6}$ oraz dla $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.



b) Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi)$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$.

Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = -\frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$ oraz dla $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$.



Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich argumentów $x \in \langle 0; 2\pi)$ funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

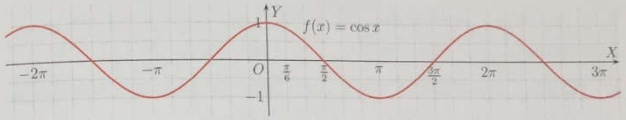
Wykres funkcji cosinus

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos x$	?	?	?	?	?	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbf{R}$, możemy skorzystać z tego, że jest to funkcja okresowa o okresie podstawowym $T = 2\pi$.
Wykres funkcji cosinus nazywamy **cosinusoidą**.



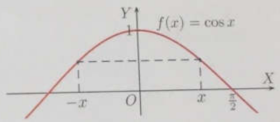
Dziedziną funkcji $f(x) = \cos x$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1\rangle$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich $x \in \mathbf{R}$ funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość: a) 1, b) 0, c) -1?

Oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \cos x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:
> $\cos(-x) = \cos x$

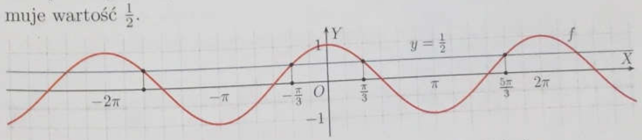


Ćwiczenie 5

Podaj równania prostych, które są osiami symetrii wykresu funkcji $y = \cos x$ oraz współrzędne punktów, które są środkami symetrii tego wykresu.

Przykład 2

Podaj te argumenty $x \in \langle -2\pi; 2\pi\rangle$, dla których funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.



Z wykresu odczytujemy, że $\cos x = \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\{-\frac{5}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$.

Ćwiczenie 6

Podaj, dla jakich argumentów $x \in \langle -3\pi; 3\pi \rangle$ funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ZADANIA

1. Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \sin x$ w podanym przedziale?

a) $\langle 0; 2\pi \rangle$ b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ c) $(0; 5\pi)$ d) $(0; 32)$

2. Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x$ należące do przedziału:

a) $\langle 0; 2\pi \rangle$, b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$, c) $\left(-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right)$, d) $\left(-\frac{9}{2}; \frac{15}{2}\right)$.

3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f:

a) przyjmuje wartości dodatnie, b) rośnie, c) maleje.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$, gdzie $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f:

a) przyjmuje wartości ujemne, b) rośnie, c) maleje.

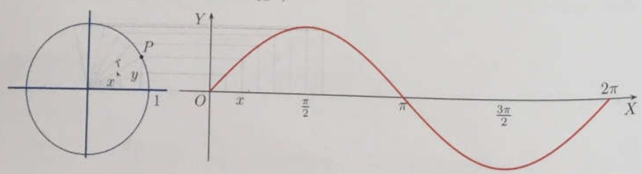
5. Ile rozwiązań w podanym przedziale ma poniższe równanie w zależności od parametru m?

a) $\sin x = m$, $\langle 0; 4\pi \rangle$
b) $\sin x = m$, $(-\pi; 3\pi)$
c) $\cos x = m$, $\langle 0; 4\pi \rangle$
d) $\cos x = m$, $(-\pi; 3\pi)$

6. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania:

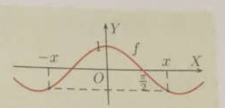
a) $\sin x = 0{,}7$, które należą do przedziału $\langle 0; 6\pi \rangle$,
b) $\cos x = \frac{1}{3}$, które należą do przedziału $\langle -4\pi; 4\pi \rangle$.

7. Objaśnij sposób otrzymywania sinusoidy, korzystając z rysunku (kątowi x odpowiada punkt P na okręgu).



Funkcję $f\colon D_f \to \mathbf{R}$ nazywamy **parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D_f$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = f(x)$$

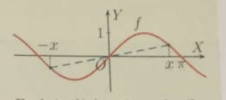


Funkcja $f(x) = \cos x$, określona dla $x \in \mathbf{R}$, jest parzysta.

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY.

Funkcję $f\colon D_f \to \mathbf{R}$ nazywamy **nieparzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D_f$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = -f(x)$$



Funkcja $f(x) = \sin x$, określona dla $x \in \mathbf{R}$, jest nieparzysta.

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $O(0, 0)$.

8. Zbadaj parzystość funkcji f.

a) $f(x) = -\sin x$
b) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
c) $f(x) = \sin x \cos x$
d) $f(x) = \sin^2 x$
e) $f(x) = x \sin x$
f) $f(x) = x^2 \sin x$
g) $f(x) = x \sin^2 x$
h) $f(x) = -|\sin x|$
i) $f(x) = \cos x + 1$
j) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{x}$
k) $f(x) = x \cos x$
l) $f(x) = -x^2 \cos x$

Przybliżone wartości funkcji sinus i cosinus (dla „małych” x) możemy obliczyć, korzystając ze wzorów (gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$):

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Na przykład: $\sin \frac{\pi}{4} \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \approx 0{,}707$.

9. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przybliżonych wartości funkcji sinus i cosinus, korzystając z powyższych wzorów.

α	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\alpha$	?	?	0,707
$\cos\alpha$	?	?	?

ZADANIA

1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ e) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{3})$
b) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \cos(x + \pi)$ f) $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$

2. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin x + 3$ c) $f(x) = \sin x - 2$ e) $f(x) = 2 - \cos x$
b) $f(x) = \cos x + 2$ d) $f(x) = -\sin x + 1$ f) $f(x) = -\sin x - 3$

3. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2$
b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6}) - 2$ d) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

4. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x) = \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ c) $f(x) = \mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{6})$ e) $f(x) = \mathrm{ctg}(x + \frac{\pi}{6}) + 1$
b) $f(x) = \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \mathrm{ctg}(x + \frac{\pi}{3})$ f) $f(x) = \mathrm{tg}(x - \frac{2}{3}\pi) - 1$

5. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -\mathrm{tg}\, x + 1$ c) $f(x) = \mathrm{tg}(-x) - 2$
b) $f(x) = -\mathrm{ctg}\, x - 1$ d) $f(x) = 1 + \mathrm{ctg}(-x)$

6. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj równania asymptot.

a) $f(x) = 1 - \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = -\mathrm{ctg}(x + \frac{\pi}{3}) - 1$
b) $f(x) = \mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{6}) - 1$ d) $f(x) = \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{6} - x) + 1$

7. Rozwiąż równanie:

a) $\mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{3})$,
b) $\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{6}) = -1$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{6})$.

8. Naszkicuj wykres funkcji f i, korzystając z niego, podaj rozwiązania równania $f(x) = a$ należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

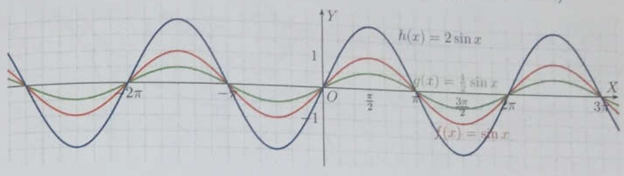
a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$, $a = \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Podaj zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = \sin x + 4$ d) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$ g) $f(x) = \sin^2 x + 1$
b) $f(x) = \sin x - 3$ e) $f(x) = 3 - \cos x$ h) $f(x) = 1 - \cos^2 x$
c) $f(x) = \cos x - \frac{1}{3}$ f) $f(x) = -1 - \sin x$ i) $f(x) = 2 + \cos^2(x + \frac{\pi}{2})$

*3.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)

Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$ (kolor zielony), $f(x) = \sin x$ (kolor czerwony), $h(x) = 2\sin x$ (kolor niebieski).



Zauważmy, że jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ należy punkt (x_0, y_0), to do wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$ należy punkt $(x_0, \frac{1}{2}y_0)$, a do wykresu funkcji $h(x) = 2\sin x$ – punkt $(x_0, 2y_0)$. Wykres funkcji g jest „ściśnięty" wzdłuż osi OY, a wykres funkcji h – „rozciągnięty".

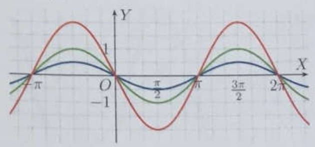
DEFINICJA

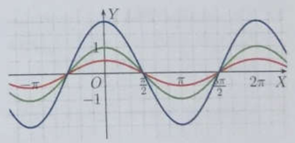
Dla funkcji $y = a\sin x$ ($y = a\cos x$), $a \neq 0$, liczbę $|a|$ nazywamy **amplitudą** wykresu funkcji sinus (cosinus).

Ćwiczenie 1

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji: f, g i h. Dobierz wzór do każdego wykresu i podaj zbiór wartości każdej funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin x$, $g(x) = -\sin x$, $h(x) = -2\sin x$
b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 2\cos x$





Ćwiczenie 2

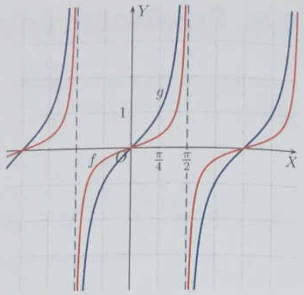
Naszkicuj wykres funkcji f, podaj jej zbiór wartości i amplitudę jej wykresu.

a) $f(x) = 3\sin x$ c) $f(x) = \frac{3}{2}\sin x$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos x$
b) $f(x) = 4\cos x$ d) $f(x) = -2\cos x$ f) $f(x) = -2{,}5\sin x$

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$.

Szkicujemy wykres funkcji f, korzystając z tego, że jeśli do wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ należy punkt (x_0, y_0), to do wykresu funkcji f należy punkt $(x_0, \frac{1}{3}y_0)$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$

ZADANIA

1. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f, g i h.

a) $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

b) $f(x) = 3\cos x$, $g(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $h(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $h(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

d) $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, $h(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 3$

2. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

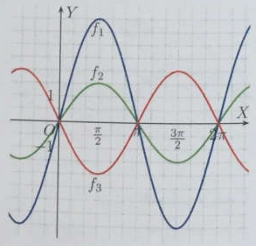
a) $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

3. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -2\operatorname{tg} x$ c) $f(x) = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$ d) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $f(x) = -2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f_1(x) = a_1 \sin x$, $f_2(x) = a_2 \sin x$, $f_3(x) = a_3 \sin x$. Wyznacz: a_1, a_2, a_3.



5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a\cos x$, jeśli: a) $f(\pi) = -\frac{3}{2}$, b) $f(\pi) = 2$.

6. Oblicz wartość współczynnika a, jeśli punkt P należy do wykresu funkcji f.

a) $f(x) = a\sin x$, $P\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$

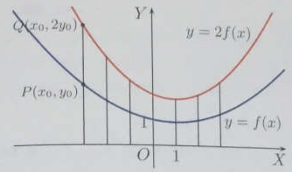
b) $f(x) = a\cos x$, $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

c) $f(x) = a\operatorname{tg} x$, $P\left(-\frac{\pi}{6}, 1\right)$

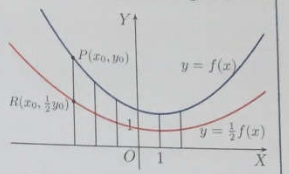
d) $f(x) = a\operatorname{ctg} x$, $P\left(\frac{4}{3}\pi, -6\right)$

7. Przeczytaj informację w ramce.

Na rysunkach poniżej pokazano, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = 2f(x)$ oraz wykres funkcji $y = \frac{1}{2}f(x)$.



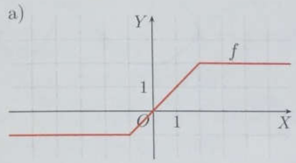
Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = 2f(x)$ należy punkt $Q(x_0, 2y_0)$.



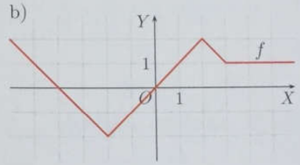
Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}f(x)$ należy punkt $R(x_0, \frac{1}{2}y_0)$.

Naszkicuj wykresy funkcji: $y = 2f(x)$ oraz $y = \frac{1}{2}f(x)$.

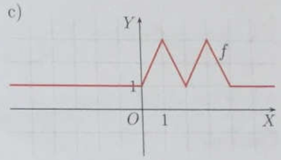
a)



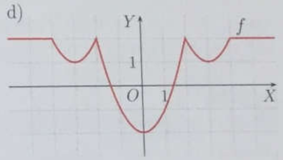
b)



c)



d)



8. Naszkicuj wykresy funkcji: f, g i h.

a) $f(x) = x$, $g(x) = 3f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

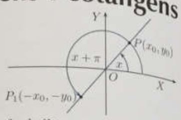
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2f(x)$, $h(x) = \frac{1}{4}f(x)$

c) $f(x) = |x|$, $g(x) = -2f(x)$, $h(x) = -\frac{1}{3}f(x)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $g(x) = \frac{3}{2}f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

9. Czy wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = af(x)$, gdzie $a \neq 1$, mają punkty wspólne?

*3.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens



Ćwiczenie 1
Uzasadnij, korzystając z rysunku obok, że liczba π jest okresem funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.

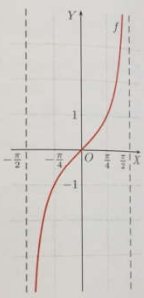
Można wykazać, że π jest okresem podstawowym funkcji tangens i cotangens.

> Dla $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{C}$: $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.
> Dla $x \neq n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{C}$: $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

Wykres funkcji tangens

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

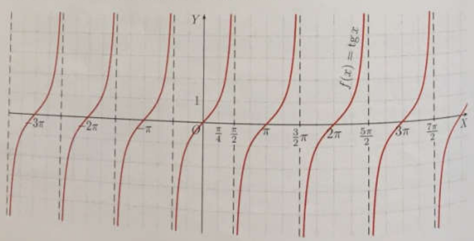
x	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\operatorname{tg} x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Proste $x = -\frac{\pi}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$ są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f.

Funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest określona dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. Aby otrzymać jej wykres, korzystamy z tego, że jest ona funkcją okresową.

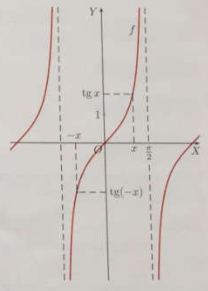
Wykres funkcji tangens nazywamy **tangensoidą**.



Własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$:
a) dziedziną jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\}$;
b) zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych;
c) jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = \pi$;
d) wartość 0 przyjmuje dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$;
e) rośnie w każdym z przedziałów $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$;
f) prosta o równaniu $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, jest asymptotą pionową wykresu funkcji.

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

> Dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$:
> $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$



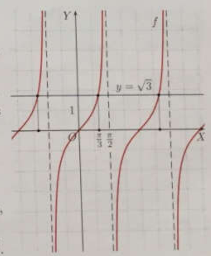
Ćwiczenie 2
Podaj współrzędne środków symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Ćwiczenie 3
a) Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = 3$.
b) Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$.
c) Podaj wartość $\operatorname{tg} x$, jeśli $\operatorname{tg}(-x) = \frac{5}{8}$.

Przykład 1
Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, wyznacz rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

W przedziale $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ dla $x = \frac{\pi}{3}$.
Na podstawie okresowości funkcji tangens otrzymujemy rozwiązanie równania:

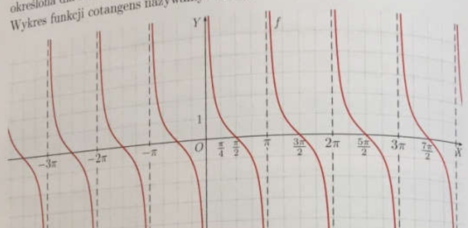
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$



Ćwiczenie 4
Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, wyznacz rozwiązanie równania:
a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, b) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wykres funkcji cotangens

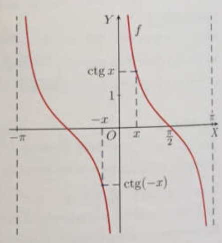
Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Jest ona określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{C}\}$, a jej okres podstawowy jest równy π.
Wykres funkcji cotangens nazywamy **cotangensoidą**.



Ćwiczenie 5
Podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ oraz równania asymptot pionowych jej wykresu.

Ćwiczenie 6
Podaj współrzędne środków symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

> Dla $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$:
> $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$



Ćwiczenie 7
Oblicz.
a) $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{6})$ b) $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{4})$ c) $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})$

ZADANIA

1. Rozwiąż równanie. Podaj najmniejszą liczbę z przedziału $(3; \infty)$ spełniającą to równanie.
a) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\operatorname{tg} x = 1$
c) $\operatorname{tg} x = -1$
d) $\operatorname{tg} x = 0$
e) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$
f) $\operatorname{ctg} x = -1$

2. Wyznacz x takie, że:
a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$,
b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle -3\pi; -2\pi \rangle$,
c) $\operatorname{tg} x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi \rangle$,
d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x \in \langle 3\pi; 4\pi \rangle$,
e) $\operatorname{ctg} x = -1$ i $x \in \langle -4\pi; -3\pi \rangle$,
f) $\operatorname{ctg} x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi \rangle$.

3. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 0; 4\pi \rangle$.
a) $\operatorname{tg} x = 0$
b) $\operatorname{tg} x = 1$
c) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\operatorname{tg} x = -1$
e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$
f) $\operatorname{ctg} x = 0$
g) $\operatorname{ctg} x = 1$
h) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Wyznacz przybliżone rozwiązanie równania należące do podanego przedziału. Skorzystaj z zamieszczonych obok informacji.
a) $\operatorname{tg} x = 0{,}3249$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$
b) $\operatorname{tg} x = -1{,}3764$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$
c) $\operatorname{ctg} x = 3{,}0777$ i $x \in \langle -3\pi; -2\pi \rangle$
d) $\operatorname{ctg} x = -0{,}7265$ i $x \in \langle -2\pi; -\pi \rangle$

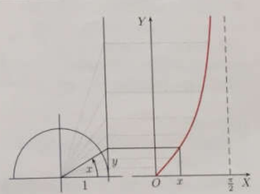
$\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \approx 0{,}3249$
$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} \approx 1{,}3764$
$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{10} \approx 3{,}0777$
$\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10} \approx 0{,}7265$

5. Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $\langle -\pi; 2\pi \rangle$. Skorzystaj z tabeli.
a) $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$
b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$
c) $\operatorname{ctg} x = 2 - \sqrt{3}$

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\operatorname{tg} x$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	$2+\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} x$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{3}$

6. Rozwiąż równanie, korzystając z powyższej tabeli.
a) $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2}$
b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} - 2$
c) $\operatorname{ctg} x = -1 - \sqrt{2}$

7. Objaśnij sposób otrzymywania tangensoidy dla $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$, korzystając z rysunku obok.

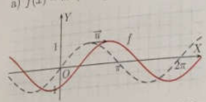


*3.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

Przykład 1

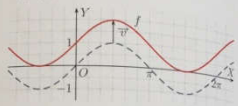
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \sin x$ o wektor $\vec{u} = [\frac{\pi}{3}, 0]$. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

b) $f(x) = \sin x + 1$



Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \sin x$ o wektor $\vec{v} = [0, 1]$. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; 2 \rangle$.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej zbiór wartości oraz okres podstawowy.

a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = \sin x - 1$ e) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) - 1$

b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}$ f) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$

Uwaga. Przesunięcie wykresu funkcji nie zmienia okresu podstawowego tej funkcji.

Przykład 2

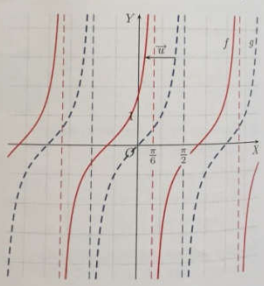
Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$$

i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ o wektor $\vec{u} = [-\frac{\pi}{3}, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór:

$$D = \mathbf{R} \setminus \{\tfrac{1}{6}\pi + k\pi : k \in \mathbf{C}\}$$



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

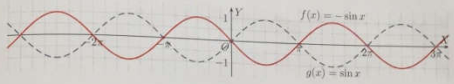
a) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$ e) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) - 1$

b) $f(x) = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{6})$ d) $f(x) = \operatorname{ctg} x - 2$ f) $f(x) = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{6}) + 1$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\sin x$.

Wykres funkcji f otrzymujemy, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $g(x) = \sin x$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2})$ e) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{6})$

b) $f(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$ f) $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$

Przykład 4

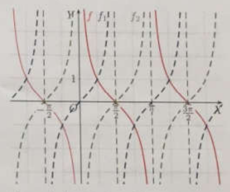
Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$$

Podaj przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji: $f_1(x) = \operatorname{tg} x$, $f_2(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$ oraz $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$.

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.



Zauważ, że $-\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{ctg} x$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe.

a) $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$ b) $f(x) = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{3})$

Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podana równość jest prawdziwa. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

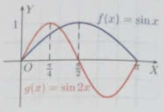
a) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ c) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ e) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} x$

b) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ d) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$ f) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} x$

*3.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)

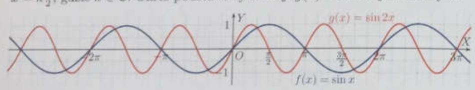
W tabeli podano wartości funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin 2x$. Na rysunku przedstawiono wykresy tych funkcji dla $x \in \langle 0; \pi \rangle$.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
$\sin 2x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



Zauważ, że funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 1 dla $x = \frac{\pi}{2}$, natomiast funkcja $g(x) = \sin 2x$ przyjmuje wartość 1 dla $x = \frac{\pi}{4}$.

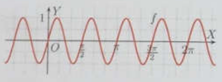
Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin 2x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $2x = k\pi$, czyli dla $x = k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin 2x$ jest równy π.



Wykres funkcji g jest, w stosunku do wykresu funkcji f, „ściśnięty" wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

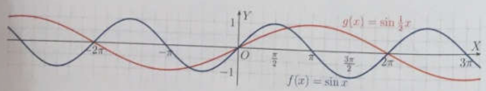
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin 4x$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz jej miejsca zerowe.



Przykład 1

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ i naszkicuj jej wykres.

Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $\frac{1}{2}x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, czyli dla $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ jest równy 4π.

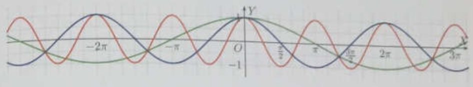


Wykres funkcji g jest, w stosunku do wykresu funkcji f, „rozciągnięty" wzdłuż osi OX.

Okres podstawowy funkcji $y = \sin ax$ oraz funkcji $y = \cos ax$, gdzie $a > 0$, jest równy $\frac{2\pi}{a}$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$ i $h(x) = \cos \frac{1}{2}x$. Dobierz wzór do każdego wykresu. Podaj okres podstawowy oraz miejsca zerowe każdej z funkcji: f, g i h.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

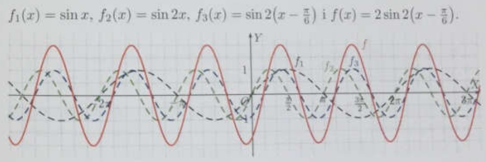
a) $f(x) = \cos 4x$ b) $f(x) = \sin 3x$ c) $f(x) = -\cos \frac{1}{2}x$ d) $f(x) = -\sin \frac{1}{2}x$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, a następnie szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

$f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$, $f_3(x) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ i $f(x) = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

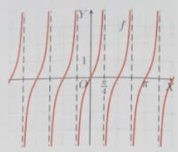
Ćwiczenie 5

Podaj miejsca zerowe funkcji f należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $f(x) = \sin 4x$ b) $f(x) = 2\sin \frac{x}{4}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}\cos \pi x$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} 2x$. Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.



Okres podstawowy funkcji f jest równy $\frac{\pi}{2}$.
$\operatorname{tg} 2x = 0$ dla $x = k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

Okres podstawowy funkcji $y = \operatorname{tg} ax$ oraz $y = \operatorname{ctg} ax$, gdzie $a > 0$, jest równy $\frac{\pi}{a}$.

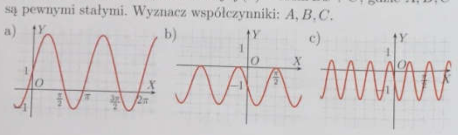
Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

a) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ b) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ c) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

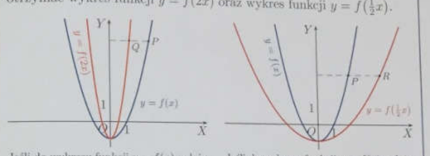
ZADANIA

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.
   a) $f(x) = 3\sin 2x$ c) $f(x) = -2\sin 3x$ e) $f(x) = 4\cos 3x$
   b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$ d) $f(x) = 3\cos \frac{x}{2}$ f) $f(x) = 2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$
2. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.
   a) $f(x) = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ d) $f(x) = 2\sin(\pi - 2x)$
   b) $f(x) = \sin 2(x - \pi)$ e) $f(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$
   c) $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $f(x) = 3\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$
3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.
   a) $f(x) = \sin \pi x$ b) $f(x) = \cos 2\pi x$ c) $f(x) = 3\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$
4. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj wartość największą i wartość najmniejszą tej funkcji.
   a) $f(x) = 2\sin(3x + \pi) + 1$ b) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$
5. Poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = A\sin Bx + C$, gdzie A, B, C są pewnymi stałymi. Wyznacz współczynniki: A, B, C.



6. Wyznacz dziedzinę oraz miejsca zerowe funkcji f i funkcji g. Naszkicuj ich wykresy oraz podaj okresy podstawowe.
   a) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$, $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$
   b) $f(x) = -\operatorname{ctg} 2x$, $g(x) = -\operatorname{ctg} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
   c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)$, $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$
   d) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$, $g(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right)$
7. Przeczytaj informację w ramce.

Na rysunkach poniżej pokazano, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = f(2x)$ oraz wykres funkcji $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

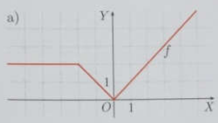


Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = f(2x)$ należy punkt $Q\left(\frac{x_0}{2}, y_0\right)$.

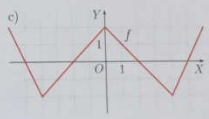
Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ należy punkt $R(2x_0, y_0)$.

Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(2x)$ oraz $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

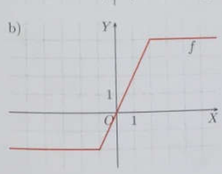
a)



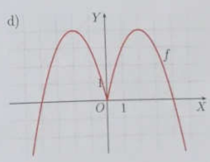
c)



b)



d)



Obrót a sinusoida

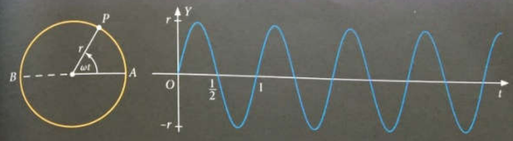
Sinusoidę można wyznaczyć, analizując ruch punktu poruszającego się po okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

London Eye
londyńskie koło widokowe

Ruch punktu po okręgu

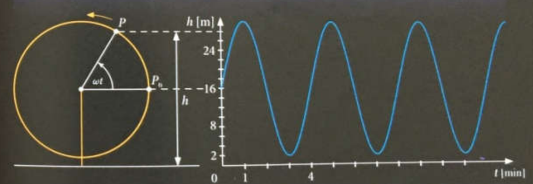
Na rysunku niżej punkt P porusza się ruchem jednostajnym, ze stałą prędkością kątową ω, po okręgu o promieniu r w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Początkowe położenie punktu P oznaczono przez A – jest to jeden z końców poziomej średnicy AB. Wykres przedstawiający zmiany odległości punktu P od średnicy AB w czasie jest sinusoidą.



Diabelski młyn

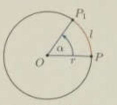
Diabelski młyn to obracające się wielkie koło, na którym zamocowane są wagoniki. Rozpatrzmy diabelski młyn o średnicy 28 m, obracający się ze stałą prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Wagonik w najniższym położeniu jest zawieszony 2 m nad ziemią, a jeden pełny obrót koła trwa 4 min.



Przyjmijmy, że w chwili $t_0 = 0$ wagonik znajdował się w punkcie P_0, czyli 16 m nad ziemią. Wysokość h, na której się znalazł po upływie czasu t (punkt P na rysunku), opisuje wzór:

$$h(t) = 14\sin(\omega t)+16$$

Ruch po okręgu



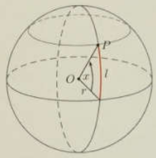
Jeśli ciało poruszające się po okręgu przemieściło się z punktu P do punktu P_1 w czasie t, to opisując ten ruch, możemy podać zarówno **prędkość kątową** $\omega = \frac{\alpha}{t}$ (stosunek kąta obrotu α do czasu t), jak i **prędkość liniową** $v = \frac{l}{t}$ (stosunek długości łuku l do czasu t).

Prędkość kątową ω zwykle podaje się w radianach na sekundę [rad/s]. Miara łukowa kąta α to stosunek długości łuku l do promienia r ($\alpha = \frac{l}{r}$), więc otrzymujemy $\omega = \frac{l}{r \cdot t}$ i stąd mamy zależność $v = r \cdot \omega$.

Przykład

Ziemia wykonuje pełny obrót wokół swojej osi w ciągu 24 godzin, zatem prędkość kątowa jej ruchu obrotowego jest równa:

$$\omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}\ [\text{rad/h}]$$



Jeżeli przyjmiemy, że Ziemia jest kulą o promieniu 6370 km, to punkt na jej równiku porusza się na skutek ruchu obrotowego z prędkością liniową:

$$v = r\omega = 6370 \cdot \frac{\pi}{12} \approx 1667\ [\text{km/h}]$$

Dla punktu P leżącego na szerokości geograficznej x prędkość liniowa wyraża się wzorem $v_P = v\cos x$ (uzasadnij).

1. Oblicz, z jaką prędkością liniową porusza się punkt leżący na tym samym równoleżniku co Kraków, którego szerokość geograficzna wynosi 50°N.

2. Ile obrotów wykonuje w ciągu sekundy koło samochodu jadącego z prędkością 60 km/h, jeśli średnica koła jest równa 52 cm? Z jaką prędkością kątową (w radianach na sekundę) obraca się to koło?

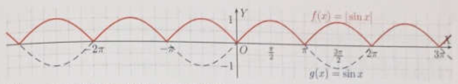
3. Przedni wał walca drogowego ma średnicę 2 m. Gdy walec jechał po prostej drodze, jego przedni wał wykonał w ciągu pół godziny 500 obrotów. Z jaką prędkością poruszał się walec? Z jaką prędkością kątową poruszał się przedni wał?

*3.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |\sin x|$ i podaj jej okres podstawowy.

Wykres funkcji $f(x) = |\sin x|$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX tej części wykresu funkcji $g(x) = \sin x$, która znajduje się pod osią OX. Pozostałą część wykresu zostawiamy bez zmian.



Okres podstawowy funkcji f jest równy π.

Ćwiczenie 1

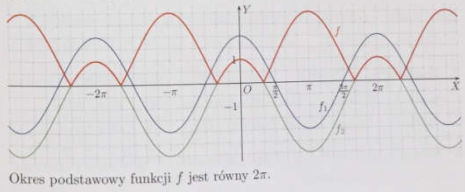
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

a) $f(x) = |\cos x|$ b) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ c) $f(x) = -|\sin x|$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2\cos x - 1|$ i podaj jej okres podstawowy.

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji:
$f_1(x) = 2\cos x$, $f_2(x) = 2\cos x - 1$ i $f(x) = |2\cos x - 1|$.



Okres podstawowy funkcji f jest równy 2π.

Ćwiczenie 2

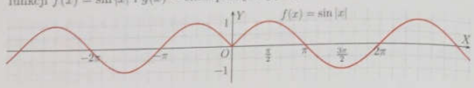
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f, g i h. Podaj okresy podstawowe tych funkcji.

a) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = |\sin 2x|$, $h(x) = |\sin 2x| - 1$
b) $f(x) = \cos 3x$, $g(x) = |\cos 3x|$, $h(x) = |\cos 3x| + 1$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin|x|$.

Wykres funkcji $f(x) = \sin|x|$ jest symetryczny względem osi OY. Wykresy funkcji $f(x) = \sin|x|$ i $g(x) = \sin x$ pokrywają się dla $x \geqslant 0$.



Funkcja f nie jest okresowa.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \sin\left(|x| + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x) = \cos\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$ c) $f(x) = \cos\left(|x| + \frac{\pi}{6}\right)$

ZADANIA

1. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ c) $f(x) = 2|\sin x| - 1$ e) $f(x) = \left|\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

b) $f(x) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ d) $f(x) = -3|\cos x|$ f) $f(x) = 2 - |3\sin x|$

2. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = -|\operatorname{tg} x|$ c) $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ e) $f(x) = |\operatorname{tg} 2x - 1|$

b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - 1$ d) $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$ f) $f(x) = \left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = |\cos 2x|$ c) $f(x) = |2\sin 3x|$ e) $f(x) = |\operatorname{tg} 2x|$

b) $f(x) = |\sin \frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = |4\cos 3x|$ f) $f(x) = |\operatorname{ctg} \frac{1}{2}x|$

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązania?

a) $f(x) = |\sin x| + 2$ b) $f(x) = |\cos x| - 1$ c) $f(x) = |\sin(x-\pi)| - 1$

5. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin|2x|$ c) $f(x) = 2 - \sin|x|$ e) $f(x) = 2\sin|2x| - 1$

b) $f(x) = \cos\left|\frac{1}{2}x\right|$ d) $f(x) = 1 - \cos|x|$ f) $f(x) = 3\cos|2x| + 1$

6. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj przedziały, w których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

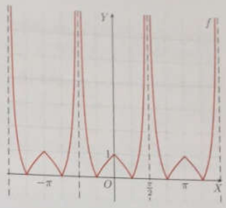
a) $f(x) = |\sin x| + \sin x$

b) $f(x) = |\cos x| + \cos x$

c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = ||\operatorname{tg} x| - 1|$. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, należących do przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$, w zależności od parametru m.



8. Podaj zbiory wartości funkcji f oraz funkcji $g(x) = |f(x)|$.

a) $f(x) = 3\sin 2x$ c) $f(x) = 2\sin x - 3$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos \pi x - 1$

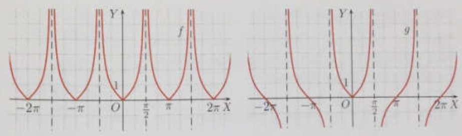
b) $f(x) = \sin 3x + 1$ d) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$ f) $f(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{-1}$

9. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązania?

a) $f(x) = 1 - |\cos 2x|$ c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + 2$ e) $f(x) = \frac{1}{|2-\cos x|}$

b) $f(x) = \left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$ d) $f(x) = |\operatorname{tg}^2 x - 4|$ f) $f(x) = \frac{1}{2-|\cos x|}$

10. Podaj rozwiązania równania $|\operatorname{tg} x| = 1$ oraz równania $\operatorname{tg}|x| = 1$, należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$. Skorzystaj z wykresów funkcji $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ i $g(x) = \operatorname{tg}|x|$.



11. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -\operatorname{tg}|x| + 1$ b) $f(x) = \operatorname{tg}\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$ c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right)$

12. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

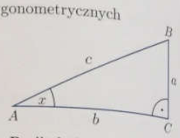
a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ b) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$ c) $f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$

*3.11. Tożsamości trygonometryczne

Przypomnijmy, że między wartościami funkcji trygonometrycznych każdego kąta ostrego x zachodzą związki:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$



Powyższe równości są spełnione dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$, dla którego obie strony równości są określone.

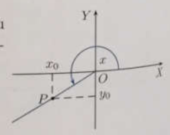
PODSTAWOWE TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$
2. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\}$
3. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{C}\}$
4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{C}\}$

Tożsamość trygonometryczna to taka równość, w której występują funkcje trygonometryczne i która jest prawdziwa dla tych wszystkich wartości zmiennej, dla których występujące w tej równości wyrażenia mają sens.

Dowód jedynki trygonometrycznej

Niech punkt $P(x_0, y_0)$, różny od początku układu współrzędnych, będzie dowolnym punktem na ramieniu końcowym kąta x. Wówczas:



$$\sin x = \frac{y_0}{r}, \ \cos x = \frac{x_0}{r}$$

gdzie $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Zatem:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{y_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2 = \frac{y_0^2 + x_0^2}{r^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2} = 1$$

Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamości trygonometryczne: 2, 3 i 4.

Przykład 1

Udowodnij, że $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

Zakładamy, że tangens jest określony oraz $1 + \sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$.

$$\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} =$$

korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\cos x(1 + \sin x)} =$$

$$= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} =$$

korzystamy z tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{\sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Ćwiczenie 2

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$ c) $(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x)\operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ d) $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x$

Czasami, aby udowodnić tożsamość trygonometryczną, warto przekształcić zarówno jej prawą, jak i lewą stronę.

Przykład 2

Udowodnij, że $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$.

$$L = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

przekształcamy lewą stronę równości

$$P = 1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

przekształcamy prawą stronę równości

Równość $L = P$ zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, zatem udowodniliśmy powyższą tożsamość trygonometryczną.

Ćwiczenie 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} - 2 = \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sin x}$ b) $\frac{\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{ctg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x \cos x}$

Przykład 3

Oblicz: $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$, wiedząc, że $\sin x = \frac{3}{5}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

Wartość $\cos x$ obliczamy, korzystając z jedynki trygonometrycznej: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, czyli $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$. Stąd:

$$\cos^2 x = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25}$$

$$\cos x = -\tfrac{4}{5} \text{ lub } \cos x = \tfrac{4}{5}$$

Dla $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ cosinus jest ujemny, zatem $\cos x = -\frac{4}{5}$. Stąd:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\tfrac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\tfrac{4}{3}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x.

a) $\sin x = -\frac{4}{5}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

b) $\cos x = -\frac{12}{13}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$

c) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$ i $x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\right\}$

$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{C}\}$

Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe tożsamości trygonometryczne, a następnie, korzystając z nich, oblicz $\cos x$, jeśli:

a) $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$,

b) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

ZADANIA

1. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$

b) $\cos x \sin^2 x + \cos^3 x = \cos x$

c) $1 - 2\sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2$

d) $\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = 1$

e) $\cos x + \operatorname{tg}^2 x \cos x = \frac{1}{\cos x}$

f) $2\sin^2 x - 1 = 1 - 2\cos^2 x$

g) $\frac{1}{\cos^2 x}(1 - \sin^2 x) = 1$

h) $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x$

i) $\frac{\operatorname{tg} x + \cos x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

j) $\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin x}$

2. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $(\cos x + \operatorname{tg} x \sin x)\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$

b) $\frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x}\operatorname{ctg} x$

c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cos x}$

d) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

e) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

f) $\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$

3. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$

b) $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} - \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{-4\sin x}{\cos^2 x}$

c) $\frac{\operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{ctg} x - 1} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$

d) $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$

4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x.

a) $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

b) $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

c) $\sin x = \frac{2}{3}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

d) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

e) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

f) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x (uwzględnij dwa przypadki).

a) $\sin x = \frac{1}{3}$

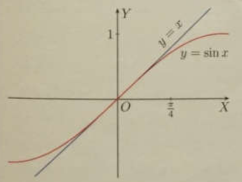
b) $\sin x = -\frac{12}{13}$

c) $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

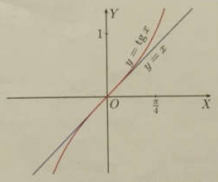
d) $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$

e) $\operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$

f) $\operatorname{tg} x = -4$



Dla „małych" kątów x wykres funkcji $y = x$ jest dobrym przybliżeniem wykresu funkcji $y = \sin x$. Na przykład: $\sin \frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314108$ ($\frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314159$).



Dla „małych" kątów x wykres funkcji $y = x$ jest dobrym przybliżeniem wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$. Na przykład: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314263$ ($\frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314159$).

Zwróć uwagę, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność $\sin x < x$.

6. Nie korzystając z kalkulatora, uzasadnij podaną nierówność.

a) $\sin \frac{\pi}{20} < 0{,}2$

b) $\sin^2 \frac{\sqrt{\pi}}{10} < 0{,}032$

*3.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

TWIERDZENIE

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ prawdziwe są poniższe wzory.

Sinus sumy kątów:	$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
Sinus różnicy kątów:	$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
Cosinus sumy kątów:	$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
Cosinus różnicy kątów:	$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

W podrozdziale „Zagadnienia uzupełniające" na stronie 183 został podany dowód wzoru na cosinus różnicy kątów.

Przykład 1

Oblicz $\sin 75^\circ$.

Korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Ćwiczenie 1

a) Oblicz $\cos 75^\circ$, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów.

b) Oblicz $\sin 105^\circ$, korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów.

c) Oblicz $\cos \frac{\pi}{12}$, korzystając ze wzoru na cosinus różnicy kątów.

Przykład 2

Oblicz.

a) $\cos 28^\circ \cdot \cos 17^\circ - \sin 28^\circ \cdot \sin 17^\circ = \cos(28^\circ + 17^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin \frac{3}{10}\pi \cdot \cos \frac{1}{5}\pi + \cos \frac{3}{10}\pi \cdot \sin \frac{1}{5}\pi = \sin(\frac{3}{10}\pi + \frac{1}{5}\pi) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\sin 85^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 25^\circ \cdot \cos 85^\circ$

b) $\sin 33^\circ \cdot \cos 12^\circ + \sin 12^\circ \cdot \cos 33^\circ$

c) $\cos \frac{8}{7}\pi \cdot \cos \frac{1}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi \cdot \sin \frac{1}{7}\pi$

d) $\sin \frac{\pi}{18} \cdot \sin \frac{4}{9}\pi - \cos \frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{4}{9}\pi$

Ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów bezpośrednio wynikają wzory na sinus kąta podwojonego i cosinus kąta podwojonego.

Ćwiczenie 3

Wyprowadź podane obok wzory na sinus kąta podwojonego i cosinus kąta podwojonego.

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Ćwiczenie 4

Wykaż, że dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$:

a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,

b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Ćwiczenie 5

a) Oblicz $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.

b) Oblicz $\sin \frac{\pi}{8}$ i $\cos \frac{\pi}{8}$, korzystając ze wzorów z ćwiczenia 4.

ZADANIA

1. Oblicz.

a) $\sin 15^\circ$

b) $\sin 105^\circ$

c) $\sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)$

d) $\sin\left(\frac{19}{12}\pi\right)$

e) $\cos 375^\circ$

f) $\cos 855^\circ$

g) $\cos(-435^\circ)$

h) $\cos 1155^\circ$

2. Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$,

c) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

3. Czy poniższa zależność jest tożsamością trygonometryczną?

a) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

b) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

c) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

d) $\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$

e) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

f) $\cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha - 3$

4. Czy poniższa zależność jest tożsamością trygonometryczną?

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$

d) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

5. Oblicz: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli:

a) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ i $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ i $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$,

c) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

d) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ i $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

6. Wyprowadź wzór.

a) $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ b) $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

7. Oblicz $\sin\frac{\pi}{12}$ oraz $\cos\frac{\pi}{12}$, korzystając ze wzorów z zadania 6.

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przykład

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \sin x - \cos x$ c) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

b) $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ d) $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

Wskazówka do podpunktu b): $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$.

9. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

a) $f(x) = 2|\sin x|\cos x$ b) $f(x) = 2\sin x|\cos x|$

10. Przeczytaj podane w ramce wyprowadzenie wzoru na tangens kąta podwojonego, a następnie wyprowadź wzór $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$
$$= \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

11. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ b) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Wskazówka: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18°, 36°, 54°, 72°

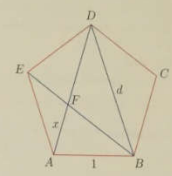
TWIERDZENIE

Przekątna pięciokąta foremnego o boku 1 ma długość równą: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Dowód

Rozważmy pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku 1 (rysunek obok). Oznaczmy przez d długość jego przekątnej oraz niech:

$$|FA| = x$$



Trójkąty ABD i FAB są podobnymi trójkątami równoramiennymi o kątach równych: 72°, 72°, 36° (sprawdź). Zatem:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{d}$$
$$dx = 1$$

Trójkąt BFD jest równoramienny (jego kąty są równe 36°, 36°, 108°), więc $d - x = |FB| = 1$. Podstawiamy $x = d - 1$ do równania $dx = 1$ i otrzymujemy:

$$d(d-1) = 1$$
$$d^2 - d - 1 = 0$$
$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ lub } d = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Przykład

Oblicz $\sin 54°$.

Zauważmy, że $\sphericalangle DCB = 108°$ (rysunek powyżej), zatem:

$$\sin 54° = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|DC|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18°, 36°, 54°, 72° (rozpatrz trójkąty równoramienne ABD i BCD z rysunku w dowodzie powyżej), a następnie przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij.

α	18°	36°	54°	72°
$\sin\alpha$	?	?	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	?
$\cos\alpha$	?	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	?	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	?	?	?	?

2. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli:

a) $\alpha = 108°$, b) $\alpha = 144°$.

*3.13. Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0; \frac{\pi}{2})$.

Obok podano wzory redukcyjne dla kątów postaci $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Można je udowodnić, korzystając ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów.

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Przykład 1

Udowodnij wzór $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$.

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha = \cos\alpha$

Przykład 2

$\cos\frac{3}{4}\pi = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 4\frac{5}{6}\pi = \sin(4\pi + \frac{5}{6}\pi) = \sin\frac{5}{6}\pi = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin\frac{3}{4}\pi$ b) $\cos 2\frac{5}{6}\pi$ c) $\operatorname{tg}\frac{17}{6}\pi$ d) $\operatorname{tg}\frac{19}{4}\pi$

WZORY REDUKCYJNE

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	
$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	
$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

We wzorach redukcyjnych miarę kąta można przedstawić w postaci $k\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, gdzie $k \in \mathbf{N}$ oraz $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$. Zauważmy, że:

1) jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja sinus zmienia się na cosinus, a funkcja tangens – na cotanges (mówimy, że funkcja zmienia się na cofunkcję); jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja pozostaje bez zmiany;
2) znak plus lub minus przed funkcją zależy od tego, czy wartość wyjściowej funkcji jest dodatnia, czy ujemna w danej ćwiartce układu współrzędnych.

$\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$	$\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$
$\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$	$\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$

Przykład 3

$\sin(-\frac{10}{6}\pi) = -\sin(\frac{10}{6}\pi) = -\sin(\frac{9}{6}\pi + \frac{\pi}{6}) =$

$= -\sin(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ korzystamy ze wzoru redukcyjnego $\sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin\frac{11}{6}\pi$ b) $\sin\frac{4}{3}\pi$ c) $\cos(-\frac{7}{4}\pi)$ d) $\operatorname{tg}(-\frac{11}{4}\pi)$

Dla kątów, których miarę podano w stopniach, wzory redukcyjne mają następującą postać:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	
$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	
$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}(270° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(360° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Przykład 4

$\sin 570^\circ = \sin(360^\circ + 210^\circ) =$ korzystamy z okresowości funkcji sinus

$= \sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) =$ korzystamy ze wzoru redukcyjnego $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

Zauważ, że ten sam wynik otrzymamy, zapisując kąt 210° w postaci $180^\circ + 30^\circ$ i korzystając ze wzoru $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$.

Ćwiczenie 3

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin 210^\circ$ d) $\cos 660^\circ$ g) $\sin(-330^\circ)$ j) $\sin(-495^\circ)$
b) $\cos 480^\circ$ e) $\sin 300^\circ$ h) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$ k) $\cos(-960^\circ)$
c) $\operatorname{tg} 225^\circ$ f) $\cos 210^\circ$ i) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$ l) $\operatorname{ctg}(-240^\circ)$

ZADANIA

1. Udowodnij wzór.

a) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ d) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$
b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ e) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$
c) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$ f) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha$

2. Udowodnij wzór, korzystając z tego, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

a) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$ c) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$
b) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ d) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

3. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ d) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ g) $\sin\frac{5}{3}\pi$ j) $\cos(-11\pi)$
b) $\sin\frac{5}{4}\pi$ e) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ h) $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi$ k) $\operatorname{ctg}\frac{4}{3}\pi$
c) $\cos\frac{7}{4}\pi$ f) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$ i) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ l) $\operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi$

4. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin 120^\circ$ d) $\cos 495^\circ$ g) $\operatorname{tg} 510^\circ$ j) $\sin(-870^\circ)$
b) $\sin 135^\circ$ e) $\cos 840^\circ$ h) $\operatorname{tg} 570^\circ$ k) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$
c) $\cos 330^\circ$ f) $\sin 660^\circ$ i) $\operatorname{tg} 1035^\circ$ l) $\operatorname{ctg}(-750^\circ)$

5. Wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, oblicz:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, c) $\cos(\pi - x)$, e) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$,
b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, d) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, f) $\sin(\pi - x)$.

6. Oblicz.

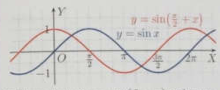
a) $2\sin 120^\circ + 4\cos 60^\circ$ d) $4\sin 45^\circ \cos 135^\circ$ g) $\sin^2 310^\circ + \cos^2 310^\circ$
b) $\sin 420^\circ \cos(-390^\circ)$ e) $\operatorname{tg} 300^\circ \operatorname{ctg} 210^\circ$ h) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 225^\circ$
c) $\operatorname{ctg} 120^\circ + \operatorname{tg}(-210^\circ)$ f) $\frac{2\cos 120^\circ}{\operatorname{ctg} 120^\circ} \operatorname{tg} 45^\circ$ i) $\operatorname{tg}^2 780^\circ - 3\operatorname{ctg}^2 420^\circ$

7. Oblicz.

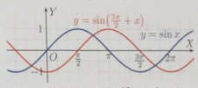
a) $\sin\frac{5}{6}\pi + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ d) $\sin\frac{7}{6}\pi + \cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$
b) $6\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi \cos\frac{7}{3}\pi$ e) $\sin^2\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + \cos^2\frac{7}{4}\pi$
c) $8\sin\frac{5}{4}\pi \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ f) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{7\pi}{3}$

8. Przeczytaj informację w ramce.

Wzory redukcyjne można uzasadnić, korzystając z odpowiedniego przesunięcia wykresu funkcji trygonometrycznej. Poniżej przedstawiono uzasadnienia wzorów: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ oraz $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x$.



Wykres funkcji $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = \cos x$.



Wykres funkcji $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = -\cos x$.

Uzasadnij wzór, stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji.

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$ b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$

9. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, uzasadnij, że wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta można wyrazić za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0^\circ; 45^\circ \rangle$.

10. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych podanej obok, oblicz:

a) $\sin 413^\circ$, d) $\sin 589^\circ$,
b) $\cos 769^\circ$, e) $\cos 860^\circ$,
c) $\operatorname{tg} 597^\circ$, f) $\operatorname{tg} 954^\circ$.

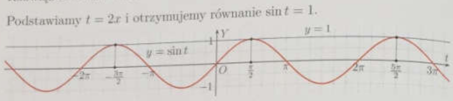
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504

*3.14. Równania trygonometryczne (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\sin 2x = 1$.

Podstawiamy $t = 2x$ i otrzymujemy równanie $\sin t = 1$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = 1$:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

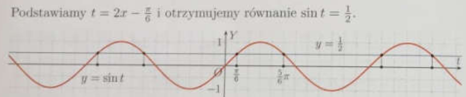
Wracamy do niewiadomej x:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Podstawiamy $t = 2x - \frac{\pi}{6}$ i otrzymujemy równanie $\sin t = \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = \frac{1}{2}$:

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } t = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$
$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 2x = \pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\sin 3x = 1$ d) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ g) $\sin^2 3x = 1$
b) $\cos 2x = -1$ e) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$
c) $\cos 4x = \frac{1}{2}$ f) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ i) $2\cos^2 2x = 1$

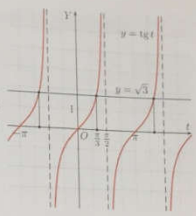
Przykład 3

Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$.

Zakładamy, że $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, czyli $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. Podstawiamy $t = 4x$ i otrzymujemy równanie $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$. Z wykresu funkcji tangens odczytujemy rozwiązania tego równania: $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

Wracamy do niewiadomej x:

$$4x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$
$$x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$



Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} 2x = -1$ b) $\operatorname{tg}^2 2x = 3$ c) $3\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

ZADANIA

1. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 4x = 1$ d) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}$
b) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ e) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ h) $3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ f) $\operatorname{tg} 4x = -1$ i) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 4x = 1$ c) $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$ e) $|2\cos 3x| = 1$
b) $\cos^2 2x = \frac{1}{2}$ d) $3\operatorname{tg}^2 \pi x = 1$ f) $\left|\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 3$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $\sin^2 x = 3\sin x$.

$$\sin^2 x - 3\sin x = 0$$
$$\sin x(\sin x - 3) = 0$$
$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = 3$$

Równanie $\sin x = 3$ jest sprzeczne. Równanie $\sin x = 0$ jest spełnione dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$ – jest to rozwiązanie równania wyjściowego.

Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 x = -\sin x$ c) $\sin^3 x + \sin x = 0$ e) $4\sin^3 x = \sin x$
b) $2\cos^2 x = \cos x$ d) $2\cos^3 x - \cos x = 0$ f) $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$

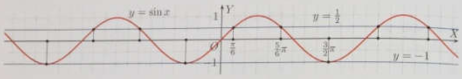
*3.15. Równania trygonometryczne (2)

Przykład 1
Rozwiąż równanie $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Podstawiamy $t = \sin x$ (przy założeniu $t \in \langle -1; 1\rangle$) i otrzymujemy:

$$2t^2 + t - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 + 8 = 9,\ \sqrt{\Delta} = 3$$
$$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1,\ t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Wracamy do niewiadomej x: $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = -1$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ lub } \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \text{ lub } \ x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Uwaga. Powyższe rozwiązanie można też zapisać w postaci $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

Ćwiczenie 1
Rozwiąż równanie.

a) $2\cos^2 x - \cos x = 1$
b) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$
c) $\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$
d) $\dfrac{\cos x + \cos^2 x + \frac{1}{4}}{\sin x} = 0$

Przykład 2
Rozwiąż równanie $\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy:

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 1 = 0$$
$$2\sin^2 x - 2 = 0$$
$$\sin x = 1 \text{ lub } \sin x = -1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Ćwiczenie 2
Rozwiąż równanie.

a) $2\cos^2 x + 4\sin^2 x = 3$
b) $4\cos^2 x - \sin^2 x = -1$
c) $2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos x + 1$
d) $2 + \sin^2 x = 4 - \cos^2 x + \cos x$

Przy rozwiązywaniu niektórych równań korzystamy z następujących wzorów.

TWIERDZENIE

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ prawdziwe są poniższe wzory.

Suma sinusów:	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
Różnica sinusów:	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
Suma cosinusów:	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
Różnica cosinusów:	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Przykład 3
Rozwiąż równanie $\sin 5x + \sin x = 0$.

$$\sin 5x + \sin x = 2\sin\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} = 2\sin 3x\cos 2x$$

korzystamy ze wzoru na sumę sinusów

Zatem rozwiązujemy równanie:

$$2\sin 3x\cos 2x = 0$$
$$\sin 3x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 2x = 0$$
$$3x = k\pi \text{ lub } 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$
$$x = \frac{k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Ćwiczenie 3
Rozwiąż równanie.

a) $\sin 5x + \sin 3x = 0$
b) $\cos 8x + \cos 2x = 0$
c) $\cos 7x - \cos 5x = 0$
d) $\sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

ZADANIA

1. Rozwiąż równanie.
a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$
b) $\cos^2 x + 6\cos x + 5 = 0$
c) $\cos^2 x + 2\sin x = 1$
d) $2\sin^2 x - \sin x = 1$
e) $2\sin^2 x - 3\cos x = 3$
f) $\mathrm{tg}^2 x - \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$

2. Rozwiąż równanie.
a) $\sin 6x - \sin 3x = 0$
b) $\sin x = \sin\frac{\pi}{5}$
c) $\sin(3x + \pi) = \sin(x - \pi)$
d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
e) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = \frac{3}{2}$

***3.** Rozwiąż równanie.
a) $\sin 3x - \sin 2x = \sin x$
b) $\cos 5x - \sin 3x = \cos x$
c) $\cos 6x + \sin 5x + \cos 2x = \sin 3x$
d) $\cos 7x - \sin 7x = \cos x - \sin x$

4. Rozwiąż równanie.
a) $\sin 2x = \cos x$
b) $\cos x + \sin 2x = 0$
c) $\cos 2x - \sin x = 0$
d) $\cos^3 x - \cos 2x = 1$
e) $\sin 2x\,\mathrm{tg}\, x = \sin x$
f) $\sin x\cos x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

***5.** Rozwiąż równanie.
a) $1 + \sin 2x = \cos 2x$
b) $\frac{1}{2}(\cos 4x - 1) = \cos^2 x$
c) $2\sin 2x + 2\sin x = 2\cos x + 1$
d) $2\sin^2 x - \sin^2 2x = \cos^2 2x$

6. Znajdź liczby należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$ i spełniające równanie:
a) $\sin x + \cos x = 1$,
b) $\sin x - \cos x = 1$,
c) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$,
d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

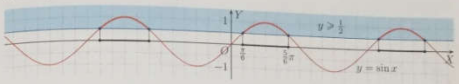
> Oblicz wartość wyrażenia $2\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \sin 70^\circ$.
>
> Szukamy kątów α, β takich, że $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin 50^\circ\cos 20^\circ$.
> W tym celu rozwiązujemy układ równań:
>
> $$\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} = 50^\circ \\ \frac{\alpha-\beta}{2} = 20^\circ \end{cases}$$
>
> i otrzymujemy $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 30^\circ$.
> Zatem:
> $2\sin 50^\circ\cos 20^\circ - \sin 70^\circ = \sin 70^\circ + \sin 30^\circ - \sin 70^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Korzystając ze wzoru na sumę sinusów lub sumę cosinusów, oblicz wartość wyrażenia:
a) $2\cos 70^\circ\cos 10^\circ - \cos 80^\circ$,
b) $2\sin 115^\circ\cos 70^\circ - \sin 185^\circ$,
c) $\sin 37^\circ 30'\cos 7^\circ 30'$,
d) $\cos 52^\circ 30'\cos 7^\circ 30'$.

8. Udowodnij wzór $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
Wskazówka. Wyznacz $\sin(x + y) + \sin(x - y)$, gdzie $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

*3.16. Nierówności trygonometryczne

Przykład 1
Rozwiąż nierówność $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Powyższy zapis oznacza, że zbiór rozwiązań nierówności jest sumą wszystkich przedziałów postaci $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

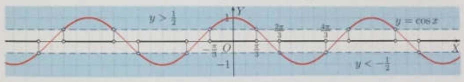
Ćwiczenie 1
Rozwiąż nierówność.

a) $2\sin x \leqslant 1$
b) $\cos x > -\frac{1}{2}$
c) $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$

Przykład 2
Rozwiąż nierówność $\cos^2 x > \frac{1}{4}$.

Zauważmy, że nierówność $\cos^2 x > \frac{1}{4}$ jest spełniona, gdy:

$$\cos x < -\frac{1}{2} \ \text{ lub } \ \cos x > \frac{1}{2}$$



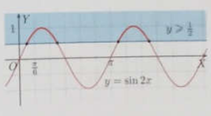
Z wykresu funkcji cosinus odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ lub } x \in \left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}$$

Odpowiedź można zapisać prościej: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

Ćwiczenie 2
Rozwiąż nierówność.

a) $2\sin^2 x < 1$
b) $|\cos x| < 1$



Ćwiczenie 3
Dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$ spełniona jest nierówność $\sin 2x \geqslant \frac{1}{2}$ (rysunek obok)?

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\sin 2x \geqslant \frac{1}{2}$.

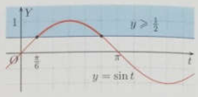
Podstawiamy $t = 2x$ i otrzymujemy nierówność $\sin t \geqslant \frac{1}{2}$. Z wykresu funkcji sinus odczytujemy:

$t \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbf{C}$

Wracamy do niewiadomej x:

$2x \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbf{C}$

$x \in \langle \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbf{C}$



Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

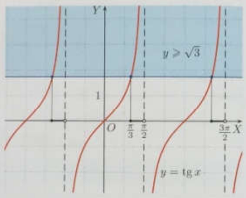
a) $\sin 3x \leqslant \frac{1}{2}$ b) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$ c) $\sin \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ d) $\cos^2 2x > \frac{1}{4}$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$.

Z wykresu funkcji tangens odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$x \in \langle \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$



Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

a) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ b) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

a) $\operatorname{tg} 2x > 1$ b) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < -\sqrt{3}$ c) $\operatorname{tg}^2 x > 1$ d) $\operatorname{ctg}^2 x \leqslant 1$

ZADANIA

1. Rozwiąż nierówność.

a) $2 \sin x < \sqrt{2}$ b) $2 \sin x \geqslant \sqrt{3}$ c) $2 \cos x \geqslant -\sqrt{3}$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin 3x \geqslant -\frac{1}{2}$ c) $2 \cos 2x \geqslant 1$ e) $\operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$

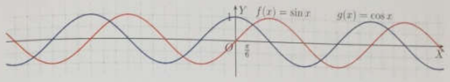
b) $2 \sin \frac{x}{2} < \sqrt{3}$ d) $\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} \leqslant 2$ f) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x \leqslant -1$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin^2 x < 1$ c) $\cos^2 x > \frac{1}{2}$ e) $\cos^2 \frac{x}{2} \geqslant 1$

b) $|2 \cos x| < 1$ d) $|2 \sin x| > \sqrt{3}$ f) $4 \sin^2 2x - 3 \geqslant 1$

4. a) Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$. Dla jakich $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$ jest spełniona nierówność $\sin x \geqslant \cos x$?



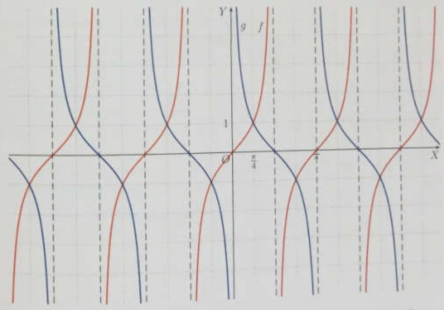
b) Dla jakich $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$ jest spełniona nierówność $\sin x < -\cos x$?

5. Podaj rozwiązania nierówności należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1$ c) $\operatorname{tg}^2 x \leqslant 1$ e) $|\operatorname{tg} x| \geqslant \sqrt{3}$

b) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x < -1$ d) $3 \operatorname{tg}^2 x < 1$ f) $|3 \operatorname{ctg} x| \geqslant \sqrt{3}$

6. a) Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ i $g(x) = \operatorname{ctg} x$. Dla jakich $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ jest spełniona nierówność $\operatorname{tg} x \geqslant \operatorname{ctg} x$?



b) Dla jakich $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ jest spełniona nierówność $\operatorname{ctg} x > -\operatorname{tg} x$?

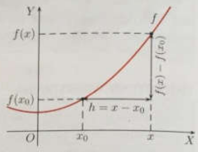
*5.8. Pochodna funkcji

W rozdziale tym zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a;b)$. Niech x_0 oraz x będą punktami należącymi do przedziału $(a;b)$.

Różnicę $h = x - x_0$ nazywamy **przyrostem argumentu** funkcji (stąd $x = x_0 + h$).

Różnicę $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazywamy **przyrostem wartości funkcji**.

Iloraz $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, dla $x \neq x_0$, zapisywany też w postaci $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0.



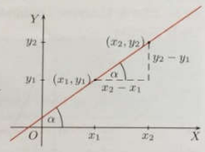
Iloraz różnicowy można interpretować jako średnią prędkość przyrostu funkcji f w przedziale $\langle x_0; x\rangle$.

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Przypomnijmy, że jeśli prosta $y = ax + b$ przechodzi przez dwa różne punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2), to jej **współczynnik kierunkowy** możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Jednocześnie iloraz $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ jest równy tangensowi kąta α (rysunek obok).



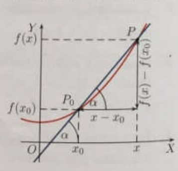
TWIERDZENIE

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax+b$ jest równy tangensowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX: $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Prostą, która przecina wykres funkcji w co najmniej dwóch punktach, nazywamy **sieczną**.

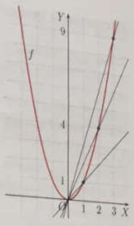
Rozpatrzmy sieczną wykresu funkcji f przecinającą ten wykres w punktach $P_0(x_0, f(x_0))$ i $P(x, f(x))$ (rysunek obok).

Iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest równy tangensowi kąta α, jaki sieczna P_0P tworzy z osią OX, a zatem jest równy współczynnikowi kierunkowemu siecznej P_0P.



Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy siecznej wykresu funkcji $f(x) = x^2$ (rysunek obok) przecinającej ten wykres w punkcie $(0,0)$ oraz w punkcie o odciętej równej: a) 1, b) 2, c) 3.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -(x-1)^2$ oraz sieczną wykresu przechodzącą przez punkty o odciętych $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$. Oblicz współczynnik kierunkowy tej siecznej.

Pochodna funkcji w punkcie

DEFINICJA

Jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie** x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Uwaga. Można wykazać, że jeśli funkcja ma w punkcie x_0 pochodną, to jest w tym punkcie ciągła. Jednak z ciągłości funkcji w punkcie x_0 nie wynika istnienie pochodnej (patrz zad. 4).

Przykład 1

a) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 3$.

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

b) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$$

Ćwiczenie 3

Oblicz $f'(x_0)$.

a) $f(x) = 5x - 3,\ x_0 = 1$

b) $f(x) = x^2 + 2,\ x_0 = 4$

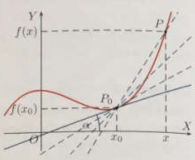
c) $f(x) = x^3,\ x_0 = -1$

d) $f(x) = x^3 + 2,\ x_0 = 3$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną. Wówczas przy x dążącym do x_0 sieczne wykresu funkcji f przechodzące przez punkt P_0 (patrz rysunek) „zbliżają się" do prostej, zwanej **styczną do wykresu funkcji** w punkcie P_0.

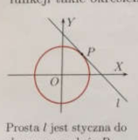
Przypomnijmy, że iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest równy tangensowi kąta, jaki sieczna P_0P tworzy z osią OX.



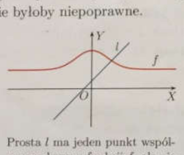
Pochodna funkcji $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$ tworzy z osią OX ($f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ na rysunku powyżej).

Liczba $f'(x_0)$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

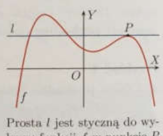
Zauważ, że o ile styczną do okręgu można zdefiniować jako prostą mającą z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, to w wypadku stycznej do wykresu funkcji takie określenie byłoby niepoprawne.



Prosta l jest styczna do okręgu w punkcie P. Prosta l ma z okręgiem jeden punkt wspólny.



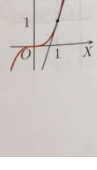
Prosta l ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f, ale nie jest jego styczną.



Prosta l jest styczną do wykresu funkcji f w punkcie P i ma trzy punkty wspólne z tym wykresem.

Przykład 2

Oblicz miarę kąta, jaki styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(1,1)$ tworzy z osią OX.



$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1^3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$$

Zatem $\operatorname{tg}\alpha = 3$, stąd $\alpha \approx 72°$.

Ćwiczenie 4

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Podaj miarę kąta, jaki ta styczna tworzy z osią OX.

a) $f(x) = x^2,\ x_0 = 1$ b) $f(x) = x^3,\ x_0 = 2$ c) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 2$

ZADANIA

1. Oblicz pochodne funkcji f w punktach x_0 i x_1.

   a) $f(x) = 2,\ x_0 = 3,\ x_1 = 6$

   b) $f(x) = 3x - 4,\ x_0 = 1,\ x_1 = 5$

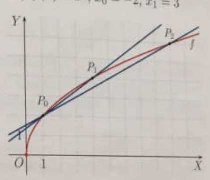
   c) $f(x) = 2x^2 - 1,\ x_0 = -1,\ x_1 = 2$

   d) $f(x) = x^3,\ x_0 = -2,\ x_1 = 3$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$.

   a) Oblicz współczynniki kierunkowe siecznych P_0P_1 i P_0P_2 oraz wyznacz ich równania.

   b) Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f poprowadzonej w punkcie P_0.



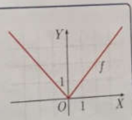
3. Oblicz miarę kąta, jaki z osią OX tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

   a) $f(x) = x^2,\ x_0 = -\frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1$ c) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = \frac{1}{4}$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przykład

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Oznacza to, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nie istnieje, czyli funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$ (chociaż jest ciągła w tym punkcie).

Uzasadnij, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0.

a) $f(x) = |x - 2|,\ x_0 = 2$

b) $f(x) = x + |x|,\ x_0 = 0$

*5.9. Funkcja pochodna

W wypadku niektórych funkcji można wykazać, że mają one pochodną w każdym punkcie dziedziny. Takie funkcje nazywamy **różniczkowalnymi**.

Przykład 1
Wykaż, że funkcja $f(x) = x^2$ ma pochodną w dowolnym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$.

Obliczamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} (x+x_0) = 2x_0$$

Zatem dla dowolnego $x_0 \in \mathbf{R}$ pochodna funkcji f jest równa $f'(x_0) = 2x_0$. Mamy więc dwie funkcje – funkcję $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, daną wzorem $f(x) = x^2$, oraz funkcję $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, daną wzorem $f'(x) = 2x$.

DEFINICJA

Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego zbioru (będącego przedziałem otwartym lub sumą przedziałów otwartych), to w tym zbiorze określona jest funkcja $y = f'(x)$, zwana **funkcją pochodną** funkcji f lub krótko **pochodną** funkcji f.

Ćwiczenie 1
Wykaż, że:
a) funkcja stała $f(x) = c$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ pochodną równą 0,
b) funkcja $f(x) = x$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ pochodną równą 1.

Wzory na pochodne zwykle zapisywane są krótko:

$(c)' = 0$, gdzie c – stała	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$
$(x)' = 1$	$(x^3)' = 3x^2$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x > 0$

Uwaga. Wzory: $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ są szczególnymi przypadkami podanego niżej wzoru.

Dla dowolnej różnej od zera liczby całkowitej n: $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \neq 0$.

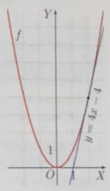
Przykład 2
Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 7$.
$f'(x) = 2x$, zatem $f'(7) = 2 \cdot 7 = 14$.

Ćwiczenie 2
Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0.
a) $f(x) = x^3,\ x_0 = -5$ b) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1\frac{9}{16}$

Ćwiczenie 3
Rozwiąż równanie $f'(x) = 2$.
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Równanie stycznej

Przykład 3
Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(2, 4)$.



Równanie stycznej zapisujemy w postaci $y = ax + b$ i obliczamy jej współczynnik kierunkowy a:

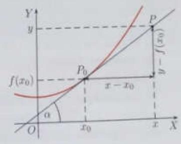
$$f'(x) = 2x, \text{ zatem } a = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

Styczna ma więc równanie $y = 4x + b$. Aby wyznaczyć wartość b, podstawiamy współrzędne punktu $(2, 4)$ do równania stycznej: $4 = 4 \cdot 2 + b$ i stąd $b = -4$. Otrzymaliśmy równanie stycznej $y = 4x - 4$.

DEFINICJA

Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną, to **styczną** do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o równaniu:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



Jeśli $P_0(x_0, f(x_0))$ jest punktem styczności, a punkt $P(x, y)$ dowolnym innym punktem stycznej, to $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$. Jednocześnie $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, zatem:

$$f'(x_0) = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$$

Stąd $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ćwiczenie 4
Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.
a) $f(x) = x^2,\ P(1, 1)$ b) $f(x) = x^2,\ P(-2, 4)$

ZADANIA

1. Na podstawie definicji pochodnej wyprowadź wzór.
a) $(x^3)' = 3x^2$ b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$ c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$

2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.
a) $f(x) = x^2,\ x_0 = -4$ b) $f(x) = x^3,\ x_0 = -3$ c) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{1}{2}$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt $30°$.
$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc szukamy punktu x_0, dla którego $f'(x_0) = 2x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Stąd $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ oraz $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{12}$. Zatem styczna ma równanie $y - \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, czyli $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{12}$.

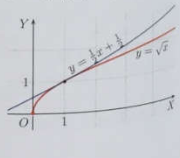
Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt: a) $45°$, b) $60°$, c) $150°$.

4. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest równoległa do prostej $y = 6x - 11$.
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

5. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest prostopadła do prostej $y = -3x + 7$.
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

6. Czy istnieje styczna do wykresu funkcji f mająca współczynnik kierunkowy równy a? Jeżeli styczna istnieje, to wyznacz jej równanie.
a) $f(x) = x^3,\ a = 3$ b) $f(x) = \frac{1}{x},\ a = -4$ c) $f(x) = \sqrt{x},\ a = -1$

7. a) Wykaż, że prosta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$.
b) Korzystając z przybliżenia $\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, oblicz $\sqrt{1{,}2}$ i $\sqrt{0{,}9}$. Porównaj otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi na kalkulatorze.



*5.10. Działania na pochodnych

TWIERDZENIE

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x oraz c jest dowolną stałą, to:
$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Przykład 1
a) $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$ b) $(6x^4)' = 6(x^4)' = 6 \cdot 4x^3 = 24x^3$

Ćwiczenie 1
Wyznacz pochodną funkcji f.
a) $f(x) = 12x^3$ c) $f(x) = 4x^7$
b) $f(x) = 0{,}5x^6$ d) $f(x) = 6x^{-1}$

POCHODNA SUMY I POCHODNA RÓŻNICY FUNKCJI

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{oraz} \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Przykład 2
a) $(x^2 + 3x - 1)' = (x^2)' + 3(x)' - (1)' = 2x + 3$
b) $\left(2x^3 + \frac{4}{x} - x + 1\right)' = 2(x^3)' + 4\left(\frac{1}{x}\right)' - (x)' + (1)' = 6x^2 - \frac{4}{x^2} - 1$ dla $x \neq 0$

Ćwiczenie 2
Wyznacz pochodną funkcji f.
a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6$ c) $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x^3 + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 3x^4 - 7x^2 - 2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2x} - 2\sqrt{x}$

POCHODNA ILOCZYNU FUNKCJI

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Przykład 3
a) $(x^2\sqrt{x})' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$ dla $x > 0$
b) $((x^2 + 1)(x^3 - 4))' = 2x(x^3 - 4) + (x^2 + 1)3x^2 = 5x^4 + 3x^2 - 8x$

Ćwiczenie 3
Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 2x\sqrt{x}$
b) $f(x) = -4x^6\sqrt{x}$
c) $f(x) = (2x^3 - 4)(x^4 + x)$
d) $f(x) = (x^3 + x^2 - 4)(4x^4 - x^2)$
e) $f(x) = \sqrt{x}(3x^5 - x^2)$
f) $f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 4\sqrt{x})$

POCHODNA ILORAZU FUNKCJI

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x oraz $g(x) \neq 0$, to:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Przykład 4
$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \text{ dla } x \neq 1$$

Ćwiczenie 4
Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$ c) $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$

Ćwiczenie 5
Uzasadnij, że jeśli funkcja g ma pochodną w punkcie x i $g(x) \neq 0$, to prawdziwy jest podany obok wzór.
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ćwiczenie 6
Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ b) $f(x) = \frac{1}{4x^2+3}$ c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}-4}$

ZADANIA

1. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.
a) $f(x) = -3x^2 + x + 4$
b) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$
c) $f(x) = 2x^3 + 4x - 6$
d) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 6x$
e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$
f) $f(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - 3x$

2. Wyznacz pochodną funkcji f.
a) $f(x) = (2x-1)(x+3)$
b) $f(x) = (x^2-1)(x^2+2)$
c) $f(x) = (1-3x^2)(x^2+x)$
d) $f(x) = (x^3-1)(2x^2-5)$
e) $f(x) = (x^3+2x^2+1)(x^2-x+1)$
f) $f(x) = (x-2)^2(1-x^2)$

3. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.
a) $f(x) = \frac{4x+1}{2x+1}$
b) $f(x) = \frac{x^2}{1-2x}$
c) $f(x) = \frac{5x-1}{x^2}$
d) $f(x) = \frac{x^2+1}{3x-1}$
e) $f(x) = \frac{6x+2}{1-x^2}$
f) $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{3x-x^2}$
g) $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$
h) $f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$
i) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{1-x}$
j) $f(x) = \frac{1}{5x-1} + \frac{1}{x}$
k) $f(x) = \frac{1}{1-x^4} - \frac{2}{x^3}$
l) $f(x) = \frac{3}{x^3-2} - \frac{1}{4x^4}$

4. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej. Oblicz $f'(1)$ i $f'(4)$.
a) $f(x) = \sqrt{x}(1-2x^2)$
b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(x-5)$
c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$
d) $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$
e) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$
f) $f(x) = \sqrt{x}\cdot x$

5. Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną sumy funkcji.

Dowód
Wyznaczamy pochodną sumy funkcji f i g w punkcie x_0.
$$(f(x_0) + g(x_0))' = \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)]+[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Udowodnij wzór na pochodną różnicy funkcji.

6. Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną iloczynu funkcji.

Dowód
Wyznaczamy pochodną iloczynu funkcji f i g w punkcie x_0.
$$(f(x_0)\cdot g(x_0))' = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x) + f(x_0)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x) + \lim_{x\to x_0} f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Udowodnij wzór na pochodną ilorazu funkcji.

7. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.
a) $f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x^2}$, $x_0 = 1$
b) $f(x) = \frac{3x^2-1}{1-x^2}$, $x_0 = 2$

8. Czy istnieje prosta o współczynniku kierunkowym równym a styczna do wykresu funkcji f?
a) $f(x) = (x^3+1)(4-x)$, $a = 0$
b) $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}$, $a = -1$
c) $f(x) = \sqrt{x} + x$, $a = 2$
d) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$, $a = 0$

9. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.
a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 2$
b) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$, $x_0 = 1$
c) $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3}$, $x_0 = 1$
d) $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x-1}$, $x_0 = -1$

Każda z funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens i cotangens ma pochodną we wszystkich punktach swojej dziedziny.

$(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\}$

$(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{C}\}$

10. Oblicz $f'(\frac{\pi}{3})$ i $f'(\frac{\pi}{4})$.
a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \cos x$ c) $f(x) = \operatorname{tg} x$ d) $f(x) = \operatorname{ctg} x$

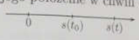
11. Wyznacz pochodną funkcji f.
a) $f(x) = \sin x \cos x$
b) $f(x) = (2x+1)\sin x$
c) $f(x) = (x^2+3)\operatorname{tg} x$
d) $f(x) = \sin^2 x$
e) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$
f) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$
g) $f(x) = \cos^2 x$
h) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
i) $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$

12. Dla jakich wartości x_0 styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ tworzy z osią OX kąt $45°$?
a) $f(x) = \cos x$
b) $f(x) = \operatorname{tg} x$

13. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.
a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

*5.11. Interpretacja fizyczna pochodnej

Przypuśćmy, że punkt materialny (lub krótko punkt) porusza się po osi liczbowej, a funkcja s opisuje jego położenie w chwili t.

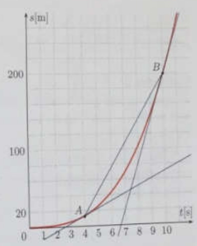


Prędkość średnia punktu w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:
$$v_{śr} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Prędkość $v(t_0)$ w chwili t_0 określamy jako granicę ilorazu różnicowego przy t dążącym do t_0:
$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

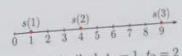
Zatem $v(t_0) = s'(t_0)$, czyli prędkość chwilowa jest pochodną położenia względem czasu.

Przykład 1
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji s opisującej położenie punktu poruszającego się po prostej w zależności od czasu t.



- Współczynnik kierunkowy siecznej AB wykresu funkcji s jest równy prędkości średniej od chwili $t_0 = 4$ do chwili $t = 10$:
$$v_{śr} = \frac{s(10)-s(4)}{10-4}$$
- Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie A jest równy prędkości w chwili $t_0 = 4$:
$$v(4) = \lim_{t\to 4} \frac{s(t)-s(4)}{t-4} = s'(4)$$
- Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie B jest równy prędkości w chwili $t = 10$:
$$v(10) = \lim_{t\to 10} \frac{s(t)-s(10)}{t-10} = s'(10)$$

Ćwiczenie 1
Położenie punktu na osi liczbowej w chwili t opisuje wzór $s(t) = t^2$. Oblicz prędkość średnią od chwili $t_1 = 1$ do chwili $t_3 = 3$ oraz prędkości w chwilach $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ oraz $t_3 = 3$.



Dla ciała wyrzuconego pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową v_0 funkcje $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ oraz $v(t) = v_0 - gt$ opisują odpowiednio wysokość h, na jakiej znajduje się ciało w chwili t, oraz prędkość v, z jaką porusza się ono w chwili t ($g \approx 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$ jest przyspieszeniem ziemskim).

Przykład 2

Metalowa kula została wystrzelona pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową $v_0 = 29{,}4$ m/s. Po podstawieniu wartości v_0 i g do wzoru:

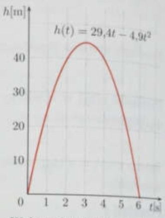
$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

otrzymujemy funkcję

$$h(t) = 29{,}4t - 4{,}9t^2$$

opisującą wysokość, na jakiej znajduje się kula w chwili t. W tabeli podano, na jakiej wysokości znajdowała się kula w kolejnych sekundach.

t[s]	0	1	2	3	4	5	6
h[m]	0	24,5	39,2	44,1	39,2	24,5	0



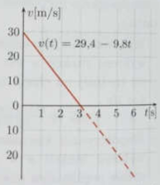
Wykres funkcji h opisującej wysokość, na jakiej znajdowała się kula w chwili t.

Ćwiczenie 2

a) Sprawdź, czy jeśli funkcja h dana jest wzorem $h(t) = 29{,}4t - 4{,}9t^2$, to jej pochodną jest funkcja $v(t) = 29{,}4 - 9{,}8t$.

b) Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wpisując prędkości metalowej kuli z przykładu 2. w wybranych chwilach t.

t[s]	0	1	2	3	4	5	6
v[m/s]	?	?	?	?	?	?	?



Wykres funkcji v opisującej prędkość, z jaką poruszała się kula w chwili t.

Pojawienie się znaku minus w obliczeniach (dla $t = 4$) świadczy o zmianie zwrotu wektora prędkości – kula najpierw poruszała się w górę, a potem w dół.

ZADANIA

1. Przyjmując, że drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało opisuje funkcja $s(t) = 4{,}9 \cdot t^2$ (gdzie droga mierzona jest w metrach, a czas w sekundach), oblicz prędkości ciała w chwilach $t_0 = 1$ i $t_0 = 3$. Odpowiedź podaj w m/s i w km/h.

2. Na Marsie przyspieszenie grawitacyjne wynosi około $3{,}7\ \mathrm{m/s^2}$, zatem funkcję opisującą drogę przebytą przez swobodnie spadające ciało można przedstawić w postaci $s(t) = 1{,}85t^2$,' gdzie droga mierzona jest w metrach, a czas w sekundach. Oblicz prędkości w chwili $t = 4$, jakie osiągnie swobodnie spadające ciało na Ziemi oraz na Marsie. Odpowiedź podaj w km/h.

3. Ciało wyrzucone pionowo w górę z powierzchni Marsa z prędkością początkową $v_0 = 18{,}5$ m/s znajduje się w chwili t na wysokości:

$$h(t) = 18{,}5t - 1{,}85t^2$$

Oblicz prędkość, z jaką poruszało się to ciało w chwili $t = 5$.

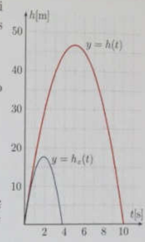
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$h(t) = 18{,}5t - 1{,}85t^2$$

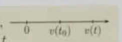
oraz dla porównania wykres funkcji:

$$h_z(t) = 18{,}5t - 4{,}9t^2$$

opisującej wysokość, na jakiej znajdowałoby się w chwili t ciało wyrzucone z tą samą prędkością początkową z powierzchni Ziemi.



Przypuśćmy, że punkt porusza się po osi liczbowej, a funkcja v opisuje jego prędkość w zależności od czasu t.



Przyspieszenie średnie w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

$$a_{śr} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Przyspieszenie $a(t_0)$ w chwili t_0 jest pochodną prędkości:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

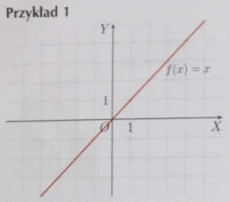
4. Prędkość, z jaką punkt porusza się po osi liczbowej, opisuje funkcja v. Oblicz przyspieszenia w chwilach $t = 1$ oraz $t = 4$.

a) $v(t) = 4t$ b) $v(t) = t^2 - t$ c) $v(t) = t^3 - 4t^2 + t$

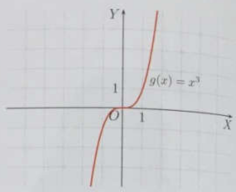
5. Wysokość w metrach, na jakiej znajduje się kula wystrzelona pionowo w górę, jest opisana za pomocą funkcji $h(t) = 24{,}5t - 4{,}9t^2$. Wyznacz funkcje opisujące prędkość i przyspieszenie tej kuli.

*5.12. Funkcje rosnące i malejące

Przykład 1



Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $f(x) = x$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = 1$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$.



Funkcja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $g(x) = x^3$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $g'(x) = 3x^2$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $g'(x) \geqslant 0$.

Ogólnie prawdziwe jest poniższe twierdzenie:

TWIERDZENIE

Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a;b)$ jest rosnąca i ma pochodną, to $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a;b)$.

Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a;b)$ jest malejąca i ma pochodną, to $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in (a;b)$.

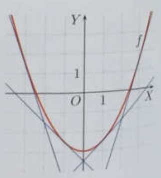
Uwaga. Przypomnijmy, że pochodna funkcji stałej w pewnym przedziale jest w tym przedziale równa 0.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ (wykres obok):

– jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$,
– jest rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = x$.
Dla $x \in (-\infty; 0\rangle$ zachodzi nierówność $f'(x) \leqslant 0$, a dla $x \in \langle 0; \infty)$ – nierówność $f'(x) \geqslant 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$ i podaj jej przedziały monotoniczności. Określ znak pochodnej funkcji f w tych przedziałach.

Czy na podstawie znaku pochodnej można wnioskować o monotoniczności funkcji? Mówi o tym poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE

Jeżeli pochodna funkcji f jest dodatnia w przedziale $(a;b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

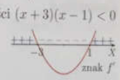
Jeżeli pochodna funkcji f jest ujemna w przedziale $(a;b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Przykład 3

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

Wyznaczamy pochodną: $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$.

Rozwiązania nierówności $(x+3)(x-1) > 0$ i nierówności $(x+3)(x-1) < 0$ odczytujemy ze szkicu wykresu pochodnej (rysunek obok):



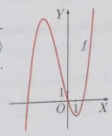
$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-3; 1)$

Na podstawie twierdzenia wnioskujemy, że funkcja f rośnie w przedziałach $(-\infty; -3)$ oraz $(1; \infty)$, a maleje w przedziale $(-3; 1)$.

Jeśli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a;b)$ i jest ciągła w przedziale $\langle a;b \rangle$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a;b \rangle$.

Funkcja f z przykładu 3. jest wielomianem, czyli jest funkcją ciągłą, zatem jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -3\rangle$ i $\langle 1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -3; 1\rangle$ (wykres obok).



Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że funkcja:

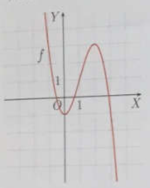
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$,

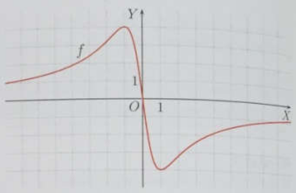
b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu jej przedziały monotoniczności. Sprawdź odpowiedź, badając znak pochodnej.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ b) $f(x) = -\frac{8x}{x^2+1}$





Ćwiczenie 4

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^3 - 3x - 5$ c) $f(x) = 6x^5 + 5x^3 + 6$ e) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

b) $f(x) = x^5 - 20x + 1$ d) $f(x) = (x+3)^2(x-1)$ f) $f(x) = \frac{x^2-7}{x-4}$

ZADANIA

1. Podaj definicję funkcji rosnącej oraz definicję funkcji malejącej. Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest malejąca w zbiorze $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$.

2. Wykaż, że funkcja f jest rosnąca.

a) $f(x) = x^3 + 6x + 8$ b) $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$ c) $f(x) = x^5 + x$

3. Wykaż, że funkcja f jest malejąca.

a) $f(x) = -x^3 - x$ b) $f(x) = -2x^3 + x^2 - 7x$ c) $f(x) = -2x^5 - x$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x + 3$ c) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ e) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ d) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ f) $f(x) = \frac{4x-5}{x^2-1}$

5. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest funkcją rosnącą w całej swojej dziedzinie?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx + 1$ b) $f(x) = x^3 + (k+2)x - 10$

*5.13. Ekstrema funkcji

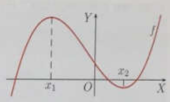
DEFINICJA

Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **minimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) > f(x_0)$.

Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **maksimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$.

Minima lokalne i maksima lokalne nazywamy **ekstremami lokalnymi** (lub po prostu ekstremami).

Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji f. Ma ona maksimum lokalne w punkcie x_1 oraz minimum lokalne w punkcie x_2.

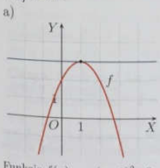


WARUNEK KONIECZNY ISTNIENIA EKSTREMUM

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$ (styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi OX).

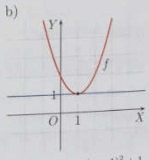
Przykład 1

a)



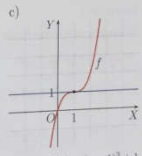
Funkcja $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ osiąga maksimum w punkcie $x_0 = 1$.

b)



Funkcja $f(x) = (x-1)^2 + 1$ osiąga minimum w punkcie $x_0 = 1$.

c)

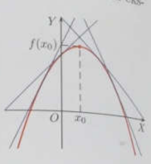


Funkcja $f(x) = (x-1)^3 + 1$ nie ma ekstremum w punkcie $x_0 = 1$.

Zwróć uwagę na to, że wszystkie funkcje w przykładzie mają w punkcie $x_0 = 1$ pochodną równą 0 (styczna do wykresu funkcji jest dla $x_0 = 1$ równoległa do osi OX). Ale tylko w podpunktach a) i b) funkcje mają w tym punkcie ekstremum.

Warunek $f'(x_0) = 0$ jest dla funkcji różniczkowalnej **warunkiem koniecznym**, nie jest natomiast **warunkiem wystarczającym** (dostatecznym) istnienia ekstremum.

Jeśli funkcja $f : (a;b) \to \mathbf{R}$ jest rosnąca w przedziale $(a;x_0)$ i malejąca w przedziale $(x_0;b)$, to ma w punkcie x_0 maksimum. W przypadku funkcji różniczkowalnej o tym, czy funkcja rośnie, czy maleje w danym przedziale, można wnioskować na podstawie znaku pochodnej.



WARUNEK WYSTARCZAJĄCY ISTNIENIA EKSTREMUM

Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a;b)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (a;x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0;b)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum.

Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a;b)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (a;x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0;b)$, to f ma w punkcie x_0 minimum.

Uwaga. Często mówimy krótko, że jeżeli pochodna funkcji f zmienia w punkcie x_0 znak z dodatniego na ujemny, to funkcja f ma w tym punkcie maksimum, a jeżeli z ujemnego na dodatni, to funkcja ma w tym punkcie minimum.

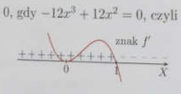
Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i pochodna funkcji f w punkcie x_0 nie zmienia znaku, to w punkcie tym funkcja nie ma ekstremum.

Przykład 2

Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = -3x^4 + 4x^3$.

$f'(x) = -12x^3 + 12x^2$ wyznaczamy pochodną funkcji f

$f'(x) = 0$, gdy $-12x^3 + 12x^2 = 0$, czyli dla $x = 0, x = 1$ wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej



aby rozwiązać nierówności $f'(x) > 0$ oraz $f'(x) < 0$, szkicujemy odpowiedni wykres

Zatem funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ ma maksimum w punkcie $x_0 = 1$. Jest ono równe $f(1) = -3 + 4 = 1$. korzystamy z warunku dostatecznego istnienia ekstremum (w $x_0 = 1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny)

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ nie ma ekstremum, gdyż pochodna nie zmienia w tym punkcie znaku.

Ćwiczenie 1

Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ d) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 12x$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 4$ f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

Przykład 3

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 7$ nie ma ekstremum.

Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x) = x^2 - 4x + 4$ i znajdujemy jej miejsca zerowe:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \text{ dla } x = 2$$

Stąd $f'(x) = 0$ dla $x = 2$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \neq 2$. Zatem funkcja f jest funkcją rosnącą w $\mathbf{R}$, więc nie ma ekstremum.

Ćwiczenie 2

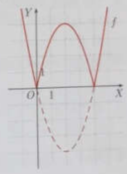
Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.

a) $f(x) = -x^3 - 3x + 10$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3+x}$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |(x-2)^2 - 4|$ i podaj jej ekstrema.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f. Z wykresu odczytujemy, że funkcja f ma jedno maksimum dla $x = 2$, $f(2) = 4$, oraz dwa minima dla $x = 0$, $f(0) = 0$ i dla $x = 4$, $f(4) = 0$.



Uwaga. Funkcja f nie jest różniczkowalna w punktach $x = 0$ oraz $x = 4$.

Z istnienia ekstremum w punkcie x_0 **nie wynika** istnienie pochodnej w x_0 (ale jeśli pochodna istnieje, to musi być równa 0).

Ćwiczenie 3

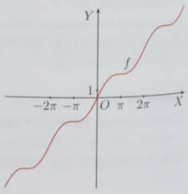
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj punkty, w których funkcja osiąga ekstrema – określ, czy są to maksima, czy minima. Czy istnieje styczna do wykresu w tych punktach? Czy istnieje pochodna funkcji w tych punktach?

a) $f(x) = -|x|$ b) $f(x) = |x^2 - 4|$

Odkrycie warunku koniecznego na istnienie ekstremum przypisuje się francuskiemu uczonemu Pierre'owi de Fermatowi [czyt. fermatowi] (1601 lub 1607–1665), który dzięki swoim dokonaniom jest uważany za jednego z prekursorów rachunku różniczkowego. W pracy *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* podał metodę znajdowania minimów i maksimów funkcji.

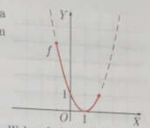
ZADANIA

1. Wyznacz ekstrema funkcji f.
   a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$
   b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 6$
   c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 3$
   d) $f(x) = x^5 + x^2 - 2$
   e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$
   f) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$
2. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f.
   a) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x}$
   b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$
   c) $f(x) = \frac{-x^2+9}{x+5}$
   d) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$
3. Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.
   a) $f(x) = 3x^5 + 20x^3 + 60x$
   b) $f(x) = \frac{6}{x^2}$
4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0? Określ rodzaj tego ekstremum.
   a) $f(x) = mx^3 - x^2 + x + 3, \ x_0 = -1$
   b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 5x - 3, \ x_0 = 1$
5. Dla jakich wartości parametru a funkcja f nie ma ekstremum?
   a) $f(x) = -x^3 + ax$
   b) $f(x) = x^3 - x^2 + ax$
6. Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ osiąga ekstremum równe -1 dla $x = 2$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum.
7. Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (wykres obok) nie ma ekstremum, mimo że dla nieskończenie wielu argumentów x zachodzi równość $f'(x) = 0$.



*5.14. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

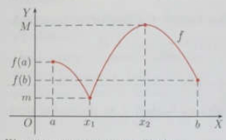
Przypomnijmy, że jeśli funkcja ciągła f określona jest w przedziale domkniętym, to przyjmuje w tym przedziale wartości najmniejszą i największą.



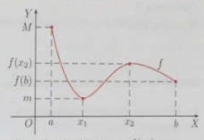
Wykres funkcji $f: \langle -1; 2\rangle \to \mathbb{R}$, danej wzorem $f(x) = (x-1)^2$.

Ćwiczenie 1
Podaj wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = (x-1)^2$ w przedziale:
a) $\langle -1; 2\rangle$ (rysunek obok), b) $\langle 2; 4\rangle$.

Wartością najmniejszą (największą) funkcji ciągłej f w przedziale $\langle a; b\rangle$ może być jedna z liczb $f(a)$, $f(b)$ lub jedno z ekstremów lokalnych.



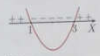
Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$, wartość największa $M = f(x_2)$.



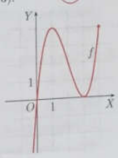
Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$, wartość największa $M = f(a)$.

Przykład 1
Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ w przedziale $\langle -1; 4\rangle$.

Wyznaczamy pochodną funkcji:
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

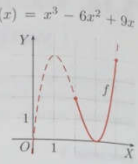


W punkcie $x = 1$ funkcja osiąga maksimum lokalne, którego wartość wynosi $f(1) = 4$.
W punkcie $x = 3$ funkcja osiąga minimum lokalne, którego wartość wynosi $f(3) = 0$.
Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału: $f(-1) = -16$, $f(4) = 4$. Zatem najmniejszą wartością funkcji w przedziale $\langle -1; 4\rangle$ jest -16, a największą 4 – wartość ta przyjmowana jest dwukrotnie.



Przykład 2
Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ w przedziale $\langle 2; 4\rangle$.

Skorzystamy z obliczeń z poprzedniego przykładu. Rozpatrujemy minimum $f(3) = 0$ oraz wartości funkcji na końcach przedziałów $f(2) = 2$, $f(4) = 4$.
Najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 2; 4\rangle$ jest 0, a największą 4.



Ćwiczenie 2
Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ w podanym przedziale.
a) $\langle -1; 3\rangle$ b) $\langle 1; 3\rangle$ c) $\langle -1; 1\rangle$

Ćwiczenie 3
Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.
a) $f(x) = x^4 - 4x, \ \langle 0; 2\rangle$ b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ \langle 1; 3\rangle$

ZADANIA

1. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.
   a) $f(x) = x^3 - 6x + 1, \ \langle -2; 0\rangle$
   b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6, \ \langle -2; 1\rangle$
   c) $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \ \langle -3; 3\rangle$
   d) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}, \ \langle -2; 3\rangle$
2. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 2\rangle$?
   a) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
   b) $f(x) = x^5 - 5x + 4$
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x}$
   d) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$

   Wskazówka. W podpunkcie c) znajdź najpierw wartości największą i najmniejszą funkcji $g(x) = x^3 - 6x$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$.
3. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ w podanym przedziale.
   a) $\langle -2; 0\rangle$
   b) $\langle 0; 2\rangle$
4. Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązanie?
   a) $3\cos x - 4\cos^3 x = m$
   b) $2\sin^3 x - 3\sin x = m$

   Wskazówka. W podpunkcie a) podstaw $t = \cos x$.

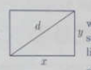
*5.15. Zagadnienia optymalizacyjne

NAJMNIEJSZY KOSZT
NAJWIĘKSZY ZYSK
NAJWIĘKSZA OBJĘTOŚĆ
NAJKRÓTSZY CZAS
NAJMNIEJSZA POWIERZCHNIA

Jednym z najczęstszych zastosowań rachunku różniczkowego jest jego wykorzystanie do wyznaczania wartości największej lub najmniejszej – zagadnienia takie będziemy nazywać zagadnieniami optymalizacyjnymi.
Jeśli mamy wyznaczyć największą (najmniejszą) wartość funkcji kwadratowej, to zamiast liczyć pochodną, możemy skorzystać ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli.

Przykład 1
Który z prostokątów o obwodzie 12 cm ma najkrótszą przekątną? Jaka jest jej długość?

Oznaczamy długości boków prostokąta przez x i y, a długość jego przekątnej przez d, wówczas:



wykonujemy (jeśli to możliwe) rysunek i wprowadzamy oznaczenia literowe

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$2x + 2y = 12$$

piszemy równanie wyrażające wielkość, której najmniejszą (największą) wartość chcemy wyznaczyć za pomocą innych zmiennych, oraz inne równania wynikające z treści zadania

Stąd $x + y = 6$, czyli $y = 6 - x$. Zauważ, że $0 < x < 6$ i $0 < y < 6$.
Zatem długość przekątnej w zależności od x opisana jest przez funkcję:
$$d(x) = \sqrt{x^2 + (6-x)^2}$$
gdzie $x \in (0; 6)$.

podstawiamy $y = 6 - x$, aby uzyskać funkcję jednej zmiennej i określamy jej dziedzinę

$d(x) = \sqrt{x^2 + 36 - 12x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$

upraszczamy wzór funkcji

Zauważmy, że wystarczy wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji:
$$k(x) = 2x^2 - 12x + 36$$
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{4} = 3, \ \ k(3) = 18$$
Czyli najmniejsza wartość funkcji d to $d(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
Szukany prostokąt jest kwadratem o boku długości 3 cm. Jego przekątna ma długość $3\sqrt{2}$ cm.

Ćwiczenie 1

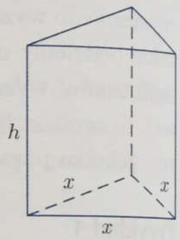
Który z prostokątów o obwodzie równym $2p$ ma:

a) największe pole,
b) najkrótszą przekątną?

Przykład 2

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?

Długości krawędzi podstawy graniastosłupa oznaczamy przez x, a jego wysokość przez h. Pole podstawy, która jest trójkątem równobocznym, opisuje wzór:



$$P = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

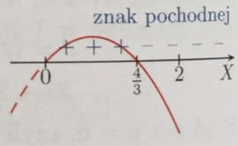
Zatem objętość graniastosłupa:

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Suma długości krawędzi graniastosłupa jest równa 12, czyli $6x + 3h = 12$, stąd wyznaczamy wysokość $h = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0; 2)$. Zatem:

$$V(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}(4 - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x^2 - x^3)$$

Wyznaczamy pochodną funkcji V:



$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4x - 3x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(4 - 3x)$$

$V'(x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ oraz $V'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right)$.

Zatem funkcja V rośnie w przedziale $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ i maleje w przedziale $\left(\frac{4}{3}; 2\right)$, czyli w punkcie $x_0 = \frac{4}{3}$ przyjmuje wartość największą: $V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?

Ćwiczenie 3

Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o obwodzie równym 8, aby walec, który powstanie z obrotu tego prostokąta dookoła jednego z boków, miał:

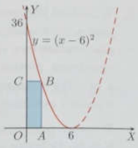
a) największe pole powierzchni bocznej,
b) największą objętość?

6. a) Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o powierzchni całkowitej 150π cm^2, aby jej objętość była największa?
b) Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o objętości 0,5 l, aby zużyć jak najmniej materiału do jej wytworzenia?

7. Blaszana puszka w kształcie walca ma mieć pojemność 0,4 dm^3. Na wycięcie kół na obie podstawy trzeba przeznaczyć kwadratowe kawałki materiału. Cena materiału, z którego wykonuje się podstawy, jest o 5% wyższa od ceny materiału, z którego wykonuje się powierzchnię boczną. Jakie wymiary powinna mieć puszka, aby koszt jej wykonania był najmniejszy?

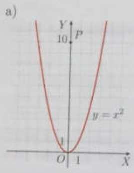
8. Jaką największą objętość może mieć stożek, którego:
a) tworząca ma długość 6 cm,
*b) przekrój osiowy jest trójkątem o obwodzie równym 8 cm?

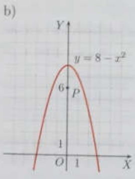
9. Wierzchołki A i C prostokąta $OABC$ należą do osi układu współrzędnych. Wierzchołek B należy do paraboli o równaniu $y=(x-6)^2$, $x \in (0;6)$ (rysunek obok). Dla jakiej długości boków tego prostokąta jego pole będzie największe?

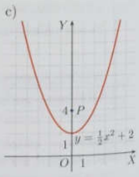


10. Wierzchołki trapezu należą do paraboli $y=-x^2+4$, przy czym końce dłuższej podstawy są punktami, w których parabola przecina oś OX. Wyznacz największe możliwe pole takiego trapezu.

11. Wyznacz punkty należące do paraboli, których odległość od punktu P jest najmniejsza.

a)


b)


c)


12. W jakim punkcie krzywej $y=x^2-1$ należy poprowadzić styczną, aby trójkąt ograniczony osiami układu współrzędnych i tą styczną miał najmniejsze pole?

*5.16. Szkicowanie wykresu funkcji

Umiejętność obliczania granic oraz określania przedziałów monotoniczności i ekstremów funkcji na podstawie jej pochodnej pozwala naszkicować wykresy wielu funkcji. W tym celu badamy przebieg zmienności funkcji, postępując według następującego schematu.

1. Określamy dziedzinę funkcji.
2. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja jest określona, i wyznaczamy asymptoty (jeśli istnieją).
4. Wyznaczamy pochodną i określamy jej dziedzinę.
5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji.

Wszystkie otrzymane wyniki możemy zebrać w tabeli, a następnie naszkicować wykres funkcji.

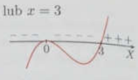
Przykład 1
Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f=\mathbf{R}$.
2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
$f(0)=0$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0,0)$.
By znaleźć punkty, w których wykres przecina oś OX, rozwiązujemy równanie $f(x)=0$:
$$\frac{1}{4}x^4-x^3=0 \Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{4}x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ lub } x=4$$
Zatem wykres funkcji f przecina oś OX w punktach $(0,0)$ i $(4,0)$.
3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞:
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3\right)=\lim_{x\to-\infty}x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x}\right)\overset{[\infty\cdot\frac{1}{4}]}{=}\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3\right)=\lim_{x\to\infty}x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x}\right)\overset{[\infty\cdot\frac{1}{4}]}{=}\infty$$
Zatem funkcja f nie ma asymptoty poziomej.

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

4. Wyznaczamy pochodną funkcji f:
$$f'(x)=\left(\frac{1}{4}x^4-x^3\right)'=x^3-3x^2$$
i określamy jej dziedzinę: $D_{f'}=\mathbf{R}$.

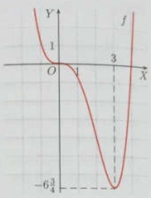
5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f.
Szukamy miejsc zerowych pochodnej:
$$x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ lub } x=3$$
Ze szkicu wykresu f' (rysunek obok) odczytujemy rozwiązania nierówności:
$f'(x)>0$ dla $x\in(3;\infty)$
$f'(x)<0$ dla $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)$
Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(3;\infty)$ i malejąca w przedziale $(-\infty;3)$. Dla $x_0=3$ funkcja osiąga minimum $f(3)=-6\frac{3}{4}$.



Otrzymane wyniki zbieramy w tabeli i szkicujemy wykres funkcji f (rysunek obok).

x	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$3<x<4$	4	$x>4$
$f'(x)$	−	0	−	0	+	+	+
$f(x)$	∞ ↘	0	↘	$-6\frac{3}{4}$	↗	0	↗ ∞

Strzałką ↘ oznaczamy, że funkcja maleje, a strzałką ↗ – że rośnie.



Sprawdź otrzymany wykres, korzystając z odpowiedniego programu komputerowego.

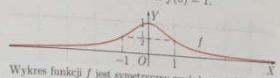
Ćwiczenie 1
Naszkicuj wykres funkcji f.
a) $f(x)=-x^3+3x$ b) $f(x)=x^4-2x^2-8$ c) $f(x)=-x^4+2x^2$

Przykład 2
Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f=\mathbf{R}$.
2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
$f(0)=1$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0,1)$.
Równanie $\frac{1}{x^2+1}=0$ nie ma rozwiązań, więc wykres nie przecina osi OX.
3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$
zatem prosta $y=0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w ∞ i w $-\infty$.
4. Wyznaczmy pochodną funkcji f:
$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=-\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$
oraz określamy jej dziedzinę: $D_{f'}=\mathbf{R}$.

5. Mianownik pochodnej jest dodatni dla $x\in\mathbf{R}$, więc znak pochodnej ustalamy na podstawie licznika: $f'(x)>0$ dla $x<0$ oraz $f'(x)<0$ dla $x>0$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;0)$ oraz malejąca w przedziale $(0;\infty)$. Dla $x_0=0$ funkcja osiąga maksimum $f(0)=1$.

x	$x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0



Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY.

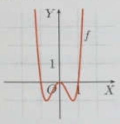
Zwróć uwagę na to, że oprócz wykorzystania danych z tabeli warto wyznaczyć kilka dodatkowych punktów należących do wykresu funkcji, np. $(1,\frac{1}{2})$, $(-1,\frac{1}{2})$.

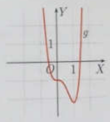
Ćwiczenie 2
Naszkicuj wykres funkcji f.
a) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$ b) $f(x)=\frac{9}{x^2-2x+4}$ c) $f(x)=(x-2)\sqrt{x}$

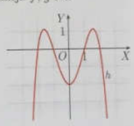
ZADANIA

1. Naszkicuj wykres funkcji f.
a) $f(x)=x^3-4x^2+4x$ b) $f(x)=\frac{4x^2+1}{x^2+4}$ c) $f(x)=\frac{4}{x^2+2x+2}$

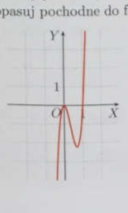
2. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: f, g i h.

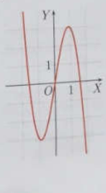


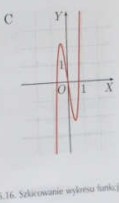




Wykresy pochodnych tych funkcji przedstawione są na rysunkach: A, B, C. Dopasuj pochodne do funkcji.

A


B


C


Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$
b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$
c) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+6x+8}{x^2+7x+12}$
d) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x^2-10x+9}{x^2-11x+18}$
e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2}$
f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-4}-1}$
b) $\lim\limits_{x\to -6} \frac{\sqrt{7+x}-1}{x+6}$
c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x-7}-1}{\sqrt{x-3}-1}$

3. Oblicz $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. Czy istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0 = 2$? Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leqslant 2 \\ 2x^2 - x - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{3}{x-5}$
b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x}$
c) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x}{4-x}$
d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$
e) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x+1}{x^2-x-6}$
f) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x+1}{x^3+8}$

5. Zbadaj, czy granica istnieje.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-3}{x^2-4x-5}$
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$

6. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^4 - x^2 + 6)$
b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-3x^5 + x^2 + x)$
c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-5x^4 - 2x + 1)$
d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x+2}{3x-1}$
e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^2+2x}{3x^2+x-1}$
f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{8x^3-x^2+1}{1-4x^3}$
g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2+x}{8x^3-x+2}$
h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{1-x}$
i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3+5x-1}{x+2}$

7. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x}$
b) $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$
c) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-5x+6}$
d) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$
e) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$
f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}+x$

8. Zbadaj ciągłość funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{dla } x<1\\ \frac{1}{x} & \text{dla } x\geqslant 1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x-3} & \text{dla } x\leqslant 2\\ x-3 & \text{dla } x>2\end{cases}$

9. Czy można tak dobrać wartość parametru a, aby funkcja f była ciągła?

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+5}-1}{x-2} & \text{dla } x\neq 2\\ a & \text{dla } x=2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-5}{x+1} & \text{dla } x<0\\ a & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}$

10. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 1.

a) $f(x)=-5x^4+\frac{1}{3}x^3+2x-1$ d) $f(x)=(x^3-1)\sqrt{x}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+2\sqrt{x}$ e) $f(x)=\frac{2x^3-x}{1+x^2}$

c) $f(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ f) $f(x)=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x}}$

Zestaw II

1. Dla jakiej wartości parametru a granica $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{ax^2-x+1}$ jest równa:

a) 1, b) 2, c) $-\infty$?

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x+x^2}+x\right)$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x}}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2+1}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x}}$

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x)=3x^2+1$, $x_0=0$ d) $f(x)=(x-4)^3$, $x_0=3$

b) $f(x)=\frac{x^3}{3}+x$, $x_0=-1$ e) $f(x)=\frac{x-3}{x}$, $x_0=1$

c) $f(x)=\frac{1}{x}-1$, $x_0=2$ f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$, $x_0=1$

4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=x^2-4x+7$, jeśli:

a) jest ona prostopadła do prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+1$,

b) tworzy ona z osią OX kąt 135°.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ c) $f(x)=\frac{x+2}{x}$ e) $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$

b) $f(x)=x^3-3x^2+3x+5$ d) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ f) $f(x)=4x+\frac{1}{x}$

6. Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2+2x+10$ d) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

b) $f(x)=x^4-6x^2+8x+1$ e) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$

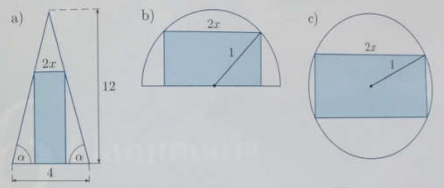
c) $f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$ f) $f(x)=\frac{3x}{x^2+4x+4}$

7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x)=x^3-6x$, $\langle -2;3\rangle$ c) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$, $\langle -4;4\rangle$

b) $f(x)=\frac{x-8}{x+2}$, $\langle 0;8\rangle$ d) $f(x)=\sqrt{2x(9-x)}$, $\langle 1;3\rangle$

8. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej x. Dla jakiego argumentu x pole jest największe? Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



Wskazówka do b) i c). Przedstaw funkcję P w postaci $P(x)=\sqrt{f(x)}$ i znajdź największą wartość funkcji f.

9. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x)=x^3+x^2-x-1$ d) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-9}$ g) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$

b) $f(x)=x^4+x^2-2$ e) $f(x)=\frac{8x}{x^2+8}$ h) $f(x)=\frac{6}{x^2-2x+8}$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2$ f) $f(x)=\frac{-2}{x^2-1}$ i) $f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x}$

10. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-9}$ b) $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$ c) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

11. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x)=x-2\sqrt{x}$ b) $f(x)=(4-x)\sqrt{x}$ *c) $f(x)=(x-2)^2\sqrt{x}$

Zestaw III

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Granica $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ jest równa:

A. 12, B. 8, C. 4, D. 2.

2. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$, gdy:

A. $f(x) = \frac{x-1}{1-x^4}$, C. $f(x) = \frac{x-1}{1-x^2}$,

B. $f(x) = \frac{x-1}{1-x^3}$, D. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

3. Prosta dana równaniem $x = -3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji:

A. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, C. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+3}$,

B. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$, D. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$.

4. Funkcja $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ -\frac{1}{2}x+2 & \text{dla } x \in (-2; \infty) \end{cases}$ jest ciągła, gdy:

A. $a = 6$, B. $a = 5$, C. $a = 1$, D. $a = -2$.

5. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$ ma współczynnik kierunkowy równy:

A. 6, B. 4, C. -3, D. -7.

6. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4$ poprowadzona w punkcie $(2, 0)$ tworzy z osią OX kąt α. Wartość bezwzględna różnicy $\beta - \alpha$ jest najmniejsza, gdy:

A. $\beta = 45°$, B. $\beta = 52°$, C. $\beta = 60°$, D. $\beta = 76°$.

7. Funkcja $f(x) = \frac{3x}{x^2-x+1}$ rośnie w przedziale:

A. $(-3; -1)$, B. $(-1; 1)$, C. $(1; 3)$, D. $(3; \infty)$.

8. Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3$ w przedziale $\langle 0; 4\rangle$ jest równa:

A. -7, B. -4, C. -3, D. 0.

9. Jaki jest największy możliwy iloczyn liczb x^2 i y, jeżeli $x > 0$ i $2x + y = 4$?

A. $\frac{64}{27}$ B. $\frac{16}{9}$ C. 2 D. 4

Z regula
praktycz
Bardzo
skiego m
Wiele pr

Filmy instruktarzowe do lekcji.

Pochodna funkcji

https://www.youtube.com/watch?v=hUj788zbSM0

https://www.youtube.com/watch?v=H1Lj1j9a89o

https://www.youtube.com/watch?v=zEi3pNB6eLU

Wykres funkcji

https://www.youtube.com/watch?v=TNit_p6VPZQ

https://www.youtube.com/watch?v=wyyteRKTouI

https://www.youtube.com/watch?v=f2HwxJ8AjPM

Optymalizacja

https://www.youtube.com/watch?v=lcyA9bMM0fQ

https://www.youtube.com/watch?v=ZpBmPVo8uvU&list=PLsjbPRk5zrObvmic-kqnBO7pRMZ5yjH24

Trygonometria

https://www.youtube.com/watch?v=hSwg-WXNpoU

https://www.youtube.com/watch?v=1LIP7FLpkyM

Miara łukowa kąta

https://www.youtube.com/watch?v=gRu9c-xjjFc

Kąt obrotu

https://www.youtube.com/watch?v=OTBD7KSvx6k

Wykresy funkcji trygonometrycznych

https://www.youtube.com/watch?v=th099zUOJ90

Tożsamości trygonometryczne

https://www.youtube.com/watch?v=jYL_vjiwLrI

Równania trygonometryczne

https://www.youtube.com/watch?v=43FIS_dXAeI

Nierówności trygonometryczne

https://www.youtube.com/watch?v=BjikfvDdF2A

Zadania do rozwiązania część II- termin oddania do 13 czerwca

1 Wykaż, że prawdziwe są tożsamości

a) $\frac{\sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}$ = ctg α
b) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4\cos\alpha \cos 2\alpha \sin 3\alpha$

2. W trójkącie równoramiennym dana jest długość podstawy a= 5 cm i miara kąta przy podstawie $\alpha = 30°$. Wyznacz długości pozostałych boków trójkąta, miary kątów oraz pole tego trójkąta.

3. Wyznacz miarę łukową kątów o mierze:

a) 45 °
b) 120°